

# Introducción **A LOS MODELOS DE OPTIMIZACIÓN**



Rodrigo Pérez Peña

# Introducción A LOS MODELOS DE OPTIMIZACIÓN

Pérez Peña, Rodrigo

Introducción a los modelos de optimización /

Rodrigo Pérez Peña.

Bogotá : Universidad Piloto de Colombia. Seccional Alto Magdalena,

2019

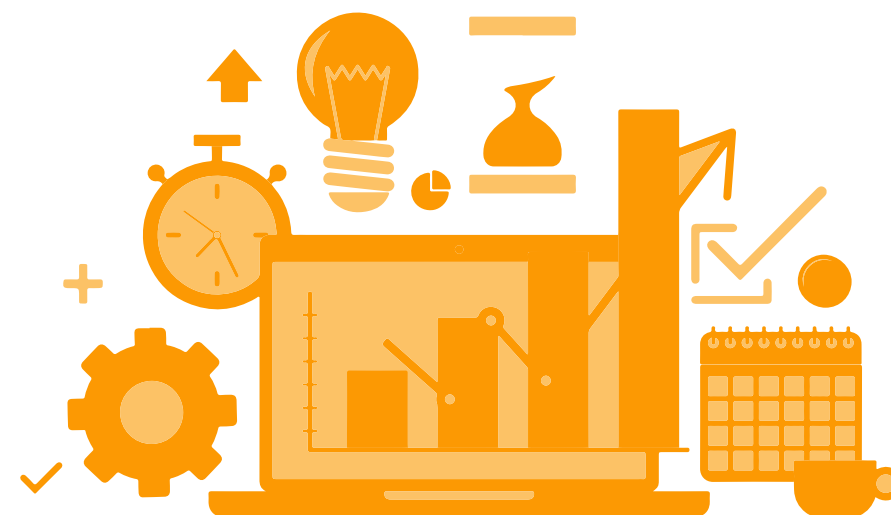
65 páginas : tablas; gráficos

Incluye referencias bibliográficas

ISBN : 9789588957999

1. Investigación de operaciones
2. Construcción de un modelo
3. Toma de decisiones

CDD 658.4034



Rodrigo Pérez Peña

## UNIVERSIDAD PILOTO DE COLOMBIA

Presidente **Olinto Eduardo Quiñones Quiñones**

Rectora **Ángela Gabriela Bernal Medina**

Director de Publicaciones y Comunicación Gráfica **Rodrigo Lobo-Guerrero Sarmiento**

Director de Investigaciones **Mauricio Hernández Tascón**

Coordinador General de Publicaciones **Diego Ramírez Bernal**

## SECCIONAL DEL ALTO MAGDALENA

Vicerrector Administrativo y Financiero **José Ernesto Bermúdez Rojas**

Vicerrector Académico **Henry Alberto Matallana Novoa**

Decana del Programa de Ingeniería Financiera **Andrea Mican Silva**

Coordinadora de Publicaciones **Karen Estefanía Sarmiento Jiménez**

Gestora de Línea de Investigación **Luz Andrea Meneses Ortegón**

Primera edición, Bogotá 2019

Autor • **Rodrigo Pérez Peña**

ISBN • **978-958-8957-99-9**

Diseño • **Juliana Vélez y Daniela Martínez Díaz**

Corrección de estilo • **Diego Nicolás Márquez**

### © Introducción a los modelos de optimización

La obra literaria publicada expresa exclusivamente la opinión de sus respectivos autores, de manera que no representan el pensamiento de la Universidad Piloto de Colombia. Cada uno de los autores, suscribió con la Universidad una autorización o contrato de cesión de derechos y una carta de originalidad sobre su aporte, por tanto, los autores asumen la responsabilidad sobre el contenido de esta publicación.

## INTRODUCCIÓN

# A LOS MODELOS DE OPTIMIZACIÓN



Ingeniería  
Financiera  
Facultad de  
Ingeniería

“

Agradezco a la Universidad Piloto de Colombia Seccional del Alto Magdalena por darme la oportunidad de llevar a feliz término la publicación de este libro que tendrá como objetivo construir a mejorar el conocimiento y aprendizaje en la actividad académica.

”

“

A mí querida esposa Ruby, quien siempre está conmigo.

A mis hijos Mario Alberto, Magda Lucía y Rodrigo.

A mis nietos Mario David y Verónica.

Esta obra es para ustedes.

”

# RODRIGO PÉREZ PEÑA

■ ■



Ingeniero Industrial, Candidato a Doctorado en Administración Gerencial, MBA con Especialidad en Finanzas Corporativas, especializado en Evaluación Social de Proyectos y Docencia Universitaria, con amplia experiencia adquirida en los diferentes cargos desempeñados en la parte administrativa, experto en formulación y evaluación, seguimiento, ejecución y Control de proyectos, tanto del sector privado como del sector público; con habilidades para diseñar estrategias que busquen mejorar de una manera eficiente y eficaz los sistemas productivos, administrativos y organizativos de una empresa; además cuento con las aptitudes para planear y desarrollar alternativas de optimización de los recursos disponibles de una empresa.

Con treinta y cinco años de experiencia en docencia, a nivel de pregrado y postgrado, en diferentes centros Universitarios del país; liderar del grupo de investigaciones desarrollo y productividad de la ciudad región de Girardot, ante Colciencias, durante los años 2014, 2015, 2016, 2017.

# CONTENIDO

## **INTRODUCCIÓN** 16

# 01

## **CAPÍTULO I** 18

¿Qué es un modelo?	19
Importancia de los modelos para la toma de decisiones	21
Modelación en la investigación de operaciones	22
Antecedentes de la investigación de operaciones	23
Aplicación de los modelos de investigación de operaciones	24
Directrices de un proyecto de investigación de operaciones	25
Fases de un estudio de investigación de operaciones	25
Estudio de la empresa u organización	26
Interpretación de la organización como un sistema	26
Identificación de los problemas de la organización	26
Construcción del modelo	27
Derivación de soluciones del modelo	29
Prueba del modelo y soluciones	29
Diseño de controles asociados a la solución	30
Implementación de la solución al sistema	30

# 02

## **CAPÍTULO II** 31

Investigación de operaciones determinística	32
Modelo lineal	32
Definición de modelo determinístico	33

Planteamiento del problema	33
Pasos para formular el modelo	35
Formulación del modelo	35
Conceptualización y equivalencias	38
Importancia de la formulación	41
Características del modelo lineal	41

## **03**

### **CAPÍTULO III**

**43**

Formulación de Casos	44
Caso 1	44
Caso 2	45
Caso 3	48

## **04**

### **CAPÍTULO IV**

**50**

Método Gráfico	51
Pasos para su solución	51
Ejemplo 1	52
Método Simplex	55
Complicaciones del Método simplex	57
Solución del Método simplex	61
Método del Gran M	67
Problemas	72

Modelo determinístico DUAL	74
Tecnología de la informática	74
Análisis Económico	76
Método dual simplex	78
Análisis Postóptimo	81
Ejercicios	95

Modelo determinístico del transporte	96
Observación sobre el modelo	97
Modelo de la matriz del transporte	98
Procedimiento	98
Ejemplo ilustrativo del problema del transporte	98
Soluciones básicas factibles al problema del transporte	100
Formulación Método simplex para la solución del problema del transporte	101
Método de la esquina noroeste	103
Método de Vogel	105
Método Solución Óptima	110
Método alternativo para seleccionar qué variable entra y sale de la base	112
Problemas de degeneración	117

<b>EJERCICIOS</b>	<b>119</b>
Problema 1	120
Problema 2	121
Problema 3	121

<b>GLOSARIO</b>	<b>123</b>
-----------------	------------

<b>REFERENCIAS</b>	<b>126</b>
--------------------	------------





# INTRO DUCCIÓN

**E**l mundo globalizado de los mercados obliga a que las empresas tengan que planificar el uso de sus recursos para lograr altos rendimientos y ser competitivas. A partir del uso de los modelos de optimización que nos ofrece la investigación de operaciones, tanto determinísticos como estocásticos, se busca obtener una utilización óptima de los recursos, tanto de los disponibles para realizar sus operaciones normales, como de los que se reinvertirán en el mercado de capitales, portafolios de inversión y en la planificación de las operaciones de las empresas. Actualmente, existen diversas herramientas que permiten incrementar la probabilidad de obtener mayor eficiencia en los procesos productivos y administrativos de la empresa y organizaciones en general.

Las entidades administran los recursos físicos, económicos, humanos y financieros, mediante la utilización de sistemas técnicos, por ejemplo, a través de modelos de producción, procesos, cuantitativos, planificación, financieros, y la inteligencia artificial, estos le permiten optimizar sus recursos y mejorar la efectividad de su gestión operativa. Resaltándose para nuestro estudio las diferentes técnicas de la investigación operacional que ofrecen diferentes tipos de métodos tanto determinísticos como estocásticos para la solución de los diferentes problemas que se puedan presentar.

Hay que recordar que los modelos no toman decisiones, éstas son tomadas por la dirección, equipos de trabajo, asesores, jefes de área y personal auxiliar quienes en forma estratégica aplican los resultados obtenidos, buscando una mayor eficiencia y eficacia en el rendimiento. El significado de “solución óptima” que nos dan los métodos en la investigación de operaciones, es el resultado definitivo, según lo planteado en el algoritmo matemático; sin embargo, pueden existir otros factores que solo los directores podrán determinar si producirán éxito o fracaso y los ajustes necesarios para funcionar realmente bien.

A partir de lo anterior, cabe la pena preguntar ¿cuál es la importancia del modelo si no garantiza la solución óptima que determina? La respuesta que se puede plantear es que si bien el modelo arroja una solución óptima del problema, la situación real puede no ser determinística, influyendo en los resultados del mismo, donde pueden incidir otros factores no considerados en el modelo; que hacen que la solución obtenida no sea el resultado final; sin embargo, contar con una perspectiva de cómo arreglar el problema es de mucha importancia para la dirección y el equipo de trabajo en aras de tomar una decisión acertada y evitar así riesgo en la inversión.

# 01

# CAPÍTULO

# I

## ¿QUÉ ES UN MODELO?

**U**n modelo es la abstracción de un problema real; al cual se le aplicarán ciertas consideraciones matemáticas, permitiendo obtener resultados óptimos.

En la investigación de operaciones se plantean una serie de modelos de optimización, los cuales sirven de apoyo a los gerentes y profesionales para la toma de decisiones, permitiéndoles pautas importantes en la búsqueda de soluciones a los diferentes problemas administrativos y en la generación de valor para la empresa. Por tal motivo, conocer este enfoque de aprendizaje a partir de la construcción de un modelo, permite a los ejecutivos y gerentes abordar los aspectos más importantes de cualquier situación para la toma de decisiones.

Antes de elaborar un modelo de optimización, se debe tener en cuenta el siguiente procedimiento:

## Importancia de los modelos para la toma decisiones

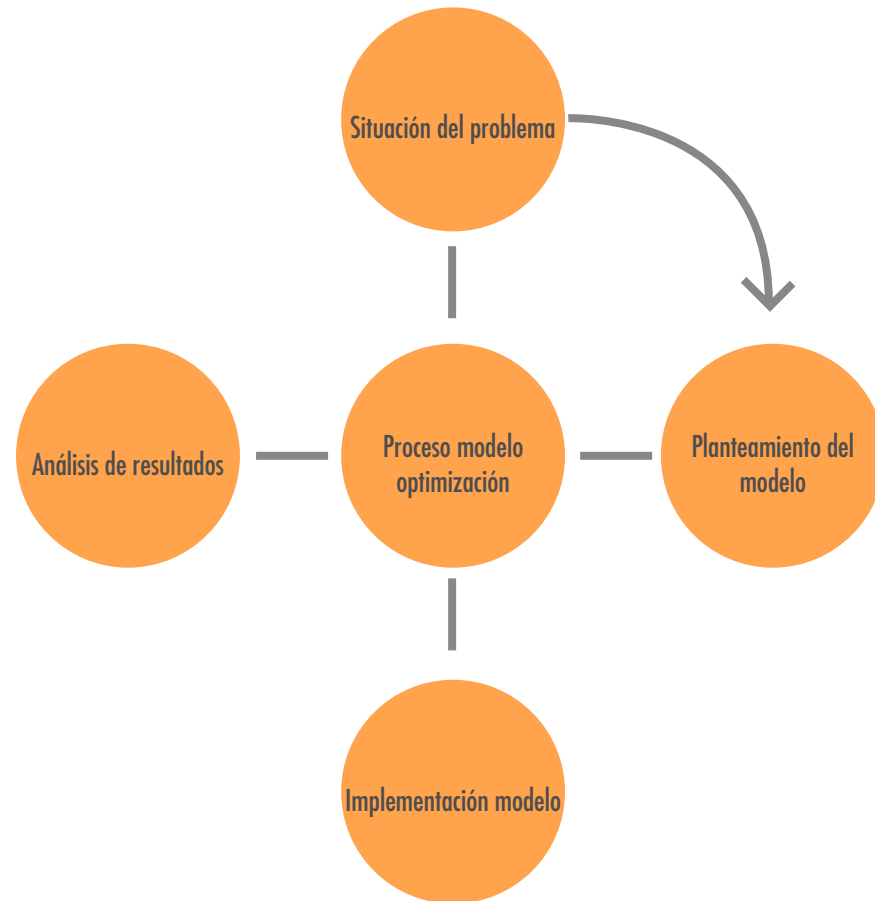


Figura 1. Proceso optimización

Fuente: Elaboración propia

Es necesario tener en cuenta que ningún modelo logra captar toda la realidad. Pues estos son una abstracción de un problema real, lo cual significa que sólo se pueden considerar algunas variables representativas de este; que al ser tenidas en cuenta en el modelo y al realizar el proceso iterativo, representa en una forma aproximada las relaciones entre ellas. Lo anterior nos permite entender en una forma sencilla cuándo es conveniente realizar un modelo y qué variables pueden ser relevantes en el mismo.

Los diferentes modelos que plantea la investigación operacional son muy importantes en la toma de decisiones gerenciales, ya que contribuyen en la solución de los diferentes problemas que se presentan en las empresas u organizaciones. Una vez establecidas las mejoras a partir del modelo, los valores óptimos pueden diferir de la realidad, por factores externos, que nada tienen que ver el modelo elaborado.

Hay situaciones donde podemos hablar de “soluciones óptimas” ante las problemáticas de la administración de las empresas, así como también para algunas decisiones del gobierno en la vida real, del mismo modo en el mundo de los negocios. Se recomienda a los directivos de las empresas que antes de aplicar los resultados realicen un análisis detallado de sus decisiones con respecto a ellas y no se fíen plenamente en el modelo. De igual manera, si al aplicar los resultados obtenidos está en desacuerdo a las pretensiones de la dirección, es conveniente que revise el modelo para realizar los ajustes pertinentes.

En los modelos de optimización se debe tener en cuenta las siguientes consideraciones.

1. Es una representación abstracta de la realidad de un problema.
2. Al elaborarse debe tenerse en cuenta suficientes argumentos que le permitan:
  - a. Obtener resultados satisfactorios de acuerdo con el problema planteado.
  - b. Los resultados obtenidos deben ser consistentes con la información del problema a resolver.
  - c. La optimización y su interpretación; se debe obtener en el menor tiempo posible.

Ciertos modelos representan una medida de desempeño que se logra a través de ciertas variables dentro de una serie de actividades, esto permite establecer qué tanto se ha logrado cumplir de las metas propuestas. Quizás el problema más relevante en la investigación de operaciones es su elaboración; el cual representa cuánto están aportando las variables seleccionadas a la solución del problema.

La investigación de operaciones ayuda a resolver todas aquellas situaciones de cuello de botella que se presentan en las diferentes áreas de operación o en la parte administrativa de las entidades, con el fin de lograr el mejor uso de los recursos disponibles.

## Consideraciones de la investigación de operaciones

Diferentes autores han realizado estudios sobre la investigación de operaciones, presentando interesantes aportes al desarrollo de las técnicas de la investigación de operaciones, uno de los que ha presentado mayores aportes es el Dr. Juan Prawda Witenberg quien ha divulgado una serie de metodologías muy importantes:

La investigación de operaciones es un método científico. Situación completamente errónea, porque hace suponer muchos métodos científicos, cuando la realidad sólo existe uno. La toma de decisiones está incluida dentro de la investigación de operaciones. Situación también falsa, ya que la investigación de operaciones es una de las tantas herramientas para la toma de decisiones (Prawda, 1979, p. 19).

Otra contribución interesante al tema, la da el Dr. Ackoff Sasiani quien argumenta que los problemas militares presentados en la segunda guerra mundial tuvieron bastante influencia para que la investigación de operaciones lograra un amplio desarrollo, para ello plantea la siguiente consideración:

La investigación de operaciones se puede considerar como:

- a. La aplicación del método científico
- b. Por equipos interdisciplinarios
- c. A problemas que comprenden el control de sistemas organizados hombre – máquina, para dar soluciones que sirvan mejor a los propósitos de la organización como un todo (Ackoff, 1979, p. 17).

Del mismo modo, Frederick S. Hiller y Gerald J. Lieberman han realizado grandes aportes al desarrollo de los modelos de la investigación de operaciones, a través de la siguiente consideración:

La investigación de operaciones significa hacer la investigación sobre las operaciones. Esto dice algo tanto del enfoque como del área de aplicación. Entonces la investigación de operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización (Hillier & Lieberman, 1994, p. 5).

## Modelación en la investigación de operaciones

La investigación de operaciones es una ciencia que cuenta con una serie de modelos que la hacen una de las herramientas más completas para el análisis de la optimización de los recursos, tanto para las empresas como para las diferentes organizaciones.

El autor Juan Prawda contribuye así a la importancia operacional:

Estos modelos matemáticos de decisión permiten calcular los valores exactos o aproximados de los componentes controlables del sistema para que pueda comportarse mejor, de acuerdo a ciertos criterios establecidos. Estos cálculos se realizan bajo el supuesto que se conoce la información asociada al estado de aquellas componentes del sistema que no se pueden controlar. El acto de calcular el valor apropiado de estas componentes controlables, se conoce como derivar una solución al problema en cuestión utilizando un modelo (Prawda, 1979, p. 22).

La investigación de operaciones utiliza dos tipos de modelos para la optimización. Unos llamados determinísticos y otros llamados estocásticos; los modelos determinísticos son aquellos en los cuales se tiene un modelo matemático previamente diseñado, es decir tenemos una función y unas restricciones a optimizar; en los estocásticos no se cuenta con un modelo previamente definido, hay que crearlo con la poca información disponible.

## Antecedentes de la investigación de operaciones

Las técnicas operativas son una aplicación del método científico a la solución de los diferentes problemas que poseen las empresas y organizaciones tanto gubernamentales como militares y privadas, con el fin de tomar decisiones que optimicen los recursos escasos.

La investigación de operaciones comienza a conocerse hacia 1759 con los modelos primitivos de programación matemática.

Posteriormente, el economista Walras también utiliza estas técnicas en el año 1874; y en 1873 Jordan, crea los modelos de programación lineal, los complementa Minkowsky en 1896 y Farkas en 1903.

En el siglo XIX hay que resaltar los descubrimientos de los modelos operacionales estocásticos de inventarios, de tiempos y movimientos; a comienzos del siglo XX los modelos de líneas de espera, todos estos hoy en día son de suma importancia para optimizar tanto los procesos productivos como los de servicios.

Otro de los métodos utilizados fue el de asignaciones; muy útil en la distribución de equipos. El cual fue fundado por los húngaros Konig y Egervay. Neuman en los años 1937 culmina los estudios relacionados con la teoría de juegos, y la teoría de preferencias, muy importantes en las decisiones de competencia.

A partir de la Segunda Guerra Mundial, la investigación de operaciones tomó mucho más auge; como consecuencia de la falta de planificación de los recursos y buscando de qué manera se podían racionar los pocos existentes. Fue en ese momento en el que los militares británicos llamaron una serie de científicos de

la investigación de operaciones y comenzaron a buscar modelos que les permitieran obtener triunfos con el menor uso de recursos bélicos y humanos.

Al obtener buenos resultados con esto, los militares estadounidenses los motivaron a realizar estudios, con iguales objetivos, donde aplicaron la investigación de operaciones a problemas complejos de logística, logrando resultados exitosos.

En igual forma se utilizó la planificación en estudios de vuelos, movilización de tropas, uso de equipos electrónicos en el campo de combate, y toda área donde fuera necesario optimizar los recursos.

Después de la guerra, vino una época de crecimiento económico, donde se querían generar procedimientos complejos y especializados en los diferentes tipos de organizaciones, en la asignación de recursos, sistemas de producción, planificación de actividades, lo cual exigió de las asesorías especializadas en las empresas y organizaciones, tanto del gobierno como particulares, y para ello se involucraron a ese grupo científicos que habían obtenido buenos resultados en la acción militar.

De esta manera, los modelos planteados por la investigación de operaciones resultan trascendentales en la optimización de los recursos disponibles, buscando los máximos beneficios a un menor costo.

## Aplicación de los modelos de investigación de operaciones

Los modelos de investigación de operaciones hoy en día son aplicables a todo tipo de negocio ya sea bursátiles, comerciales, industriales, servicios, financieros, en planificación de los recursos de la salud y en general a todas las inversiones que impliquen optimización de recursos.

Estos modelos pueden ser aplicables tanto al sector privado como al sector público.

Actualmente, existen diferentes organizaciones dedicadas a la fundamentación teórica y práctica de los diferentes modelos de la investigación de operaciones.

Existen varias asociaciones que agrupan a miembros que se dedican a la aplicación de la investigación de operaciones en todo el mundo. En los Estados Unidos, existen dos asociaciones la Operations Research Society of Management Science, con aproximadamente 12000 miembros y el Institute of Management Science, con aproximadamente 8000 miembros, además hay asociaciones Canadienses, Europeas, Latinoamericanas y Asiáticas (Prawda, 1979, pág. 24).

## Directrices de un proyecto de investigación de operación

Al realizar un análisis de un proyecto de investigación de operaciones se deben considerar las siguientes directrices.

### 1. Realizar decisiones más eficientes

Las empresas, como las organizaciones en general, al realizar la toma de decisiones durante su gestión lo hacen en una forma técnica, sin tener en cuenta la relación existente entre las diferentes áreas que las componen. Los modelos operacionales permiten analizar estas interrelaciones entre las variables, evitando posibles fallas y traumas en la solución de los problemas.

### 2. Interrelacionar las diferentes áreas de las empresas u organizaciones.

La investigación de operaciones a través de sus diferentes modelos, considera la posibilidad de implementar orden en las diferentes áreas de las empresas u organizaciones; tal es el caso de los requerimientos de materia prima en un proceso productivo, donde se debe contar con unos buenos inventarios de materia prima y una disposición adecuada de la circulación de esta dentro del proceso.

### 3. Establecer un seguimiento eficiente de los procedimientos

Otra gran ayuda de los modelos de investigación de operaciones es que se puede lograr establecer una supervisión de las operaciones de una empresa u organización, evitando inconvenientes a futuro.

### 4. Obtener óptimos procedimientos

A través de estas técnicas se puede lograr la optimización de los ingresos y costos mediante la maximización o minimización de una función objetivo y a su vez obtener mayor fluidez de los recursos eliminando los posibles inconvenientes que se puedan presentar; facilitando una mejor interrelación entre los diferentes componentes de la empresa u organización.

## Fases de un estudio de investigación de operaciones

De acuerdo con Prawda (1979, p. 27), se pueden considerar las siguientes fases en un estudio de investigación:

1. Estudio de la organización
2. Interpretación de la organización como un sistema
3. Formular el problema de la organización

4. Construcción del modelo
5. Derivación de soluciones del modelo
6. Prueba del modelo y sus soluciones
7. Diseño de controles asociados a las soluciones
8. Implementación de las soluciones al sistema

A continuación, se detalla cada una de estas fases.

### Estudio de la empresa u organización

Al elaborar un trabajo de investigación de operaciones se debe tener en cuenta en primer lugar, cómo está funcionando la empresa u organización, y cómo está relacionada con el medio externo. Al tener ese conocimiento se puede tomar una apreciación sobre el tipo de empresa a analizar y los posibles problemas que la rodean. Esto permite que se definan variables que estén más directamente relacionadas con el problema como en los modelos a implementar y poder obtener óptimas soluciones.

### Interpretación de la organización como un sistema

Quiere decir esto que se debe considerar la empresa como un sistema organizado donde el comportamiento de cualquier parte de esta puede ser afectado por otra. En la investigación de operaciones implica ampliar el problema al presentado originalmente, de tal manera que se incluyan interacciones que no se tienen en la formulación hecha por la administración.

### Formular el problema de la organización

Al realizar un estudio operacional se deben plantear varias alternativas de solución, antes de formular el problema que se busca solucionar.

Ackoff hace unas consideraciones a tener en cuenta para plantear un problema de manera sencilla:

1. Debe existir por lo menos un individuo al que se le pueda atribuir el problema, el individuo ocupa un medio ambiente.
2. El individuo debe tener, por lo menos, dos posibles cursos de acción  $C_1$  y  $C_2$  que pueda seguir; es decir, debe poder hacer una selección de comportamiento.
3. Debe existir, cuando menos, dos resultados posibles de su selección, de los cuales él prefiere uno en vez del otro; es decir debe haber, cuando menos, un resultado que él quiera, un objetivo.
4. Los cursos de acción disponibles deben ofrecer cierta oportunidad de lograr su objetivo, pero no puede dar la oportunidad a ambos.
5. Las personas que toman las decisiones desconocen las soluciones y/o eficiencias y/o efectividades relacionadas con las soluciones del problema” (Ackoff, 1979, p. 35-36).

Para determinar si existe o no un problema se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Que la problemática, sea para varios y no en una forma individual.
- Que la posición donde se encuentra la problemática sufra cambios permanentemente.
- Poseer la disponibilidad de seleccionar varias estrategias, en una forma finita.
- Que el conjunto de la problemática pueda identificar varios objetivos. Aunque no sean prioritarios.
- Que la estrategia seleccionada pueda ser realizada por otro grupo.
- Que las decisiones tomadas repercutan tanto en el conjunto de la problemática como en los ajenos a esta, ejemplo: productores y no productores.

### Clase de problemas

Se consideran dos tipos de problemas los determinísticos y los estocásticos, estos últimos identificados según niveles de incertidumbre y riesgo que se tengan.

#### *Problema Determinístico*

En el problema determinístico, cada alternativa planteada tiene una solución, cuando existe más de una alternativa existirá más de una solución. Cada una tiene una función que medirá la eficiencia y/o efectividad de esta y estará asociada a los objetivos del sistema.

#### *Problema Estocástico*

Son aquellos que poseen cierto nivel de incertidumbre, con la presencia de variables inciertas, para su medición es necesario contar con una cierta probabilidad. La función de distribución de estas probabilidades es identificable y por consiguiente calculable.

#### *Problema de Incertidumbre*

En este tipo de problemas los niveles de incertidumbre son altos y se requiere de información estadística; para ello es necesario estimar las probabilidades a plantear en el modelo.

### Construcción del modelo

Al estudiar las técnicas de investigación operacional, se tienen tres clases de modelos:

Los icónicos, analógicos, simbólicos.

### Modelos icónicos

Los modelos icónicos se representan mediante una imagen y su medición puede hacerse en escala de acuerdo con el tipo de situación que se desee analizar. Por ejemplo imágenes, maquetas, mapas y representaciones de situaciones reales con ciertas dimensiones para su formación como barcos, automóviles, aviones, canales, como aparece en la figura 2.

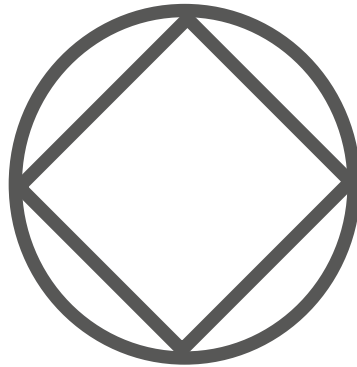


Figura 2. Modelo imagen ícono.  
Fuente: Elaboración Propia

### Modelos analógicos

Se logran mediante esquemas cuyas propiedades son las de un modelo que se obtiene a partir del problema que se desea resolver; referenciando otro modelo cuyas propiedades son equivalentes. Por ejemplo, las propiedades de un modelo de red, de interconexión aérea entre varios países son equivalentes a la red de un sistema interconexión satelital (figura 3).



Figura 3. Modelos Análogos  
Fuente. Elaboración propia

### Modelos simbólicos

Es el modelo más utilizado por su bajo costo y su fácil elaboración. Tiene forma abstracta de la situación a analizar; y se puede hacer mediante el uso de letras, números, variables y ecuaciones. Suele ser muy flexible, por lo cual permite realizar diferentes clases de modelos. (Ver figura 4)

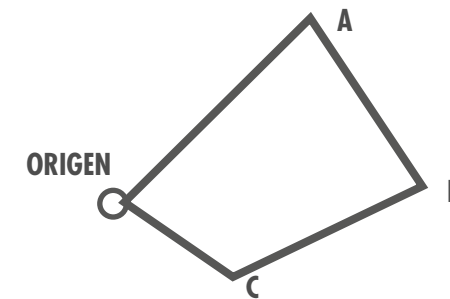


Figura 4. Modelos Simbólicos  
Fuente: Elaboración Propia

Por falta de información en la búsqueda de una solución de un problema, muchas veces es necesario cambiar de una clase de modelo a otro para obtener información. Esto evita que se cometan errores; hay que considerar que entre más sencillo sea el modelo, menos dificultad se tiene en la consecución de la información.

### Derivación de soluciones del modelo

Encontrar una solución es hallar los valores a las variables que hacen que su solución sea óptima, sin embargo, como se ha expresado, esta solución no necesariamente determina una mejoría en la eficiencia o eficacia al sistema.

El análisis matemático que se hace a un modelo de solución por investigación de operaciones se realiza en forma deductiva, es decir, parte de lo más general a lo particular.

Así mismo, otra manera de llegar a soluciones posibles, es el método iterativo, donde se van obteniendo soluciones factibles hasta encontrar la solución óptima, realizando un recorrido en el llamado polígono de soluciones hasta encontrar la óptima.

### Prueba del modelo y soluciones

Los modelos se deben probar independientemente de quién lo realice, con el fin de comprobar si los resultados obtenidos son predicciones verdaderas o qué tan cerca están de ser confiables. Es recomendable que la persona o equipo de trabajo de la toma de decisiones siga los siguientes pasos al realizar la prueba.

1. Se debe comprobar que el diseño elaborado, no presente fallas; de tal manera que al realizar las diferentes iteraciones se vuelva infactible.
2. Una vez se compruebe la veracidad del modelo, se revisan las expresiones matemáticas; si están acorde a los objetivos que se pretenden lograr con este.
3. Una vez revisado tanto el modelo como su representación matemática; se selecciona la técnica para obtener la solución; los resultados obtenidos se analizan e interpretan según el problema planteado.
4. El análisis de los resultados deben hacerse de tal manera que sean entendibles por los interesados en los resultados.
5. Una vez analizados se deben hacer los ajustes necesarios al modelo y luego se hace la implementación al problema real de la empresa.

#### **Diseño de controles asociados a la solución**

Al realizar el diseño del sistema al modelo en estudio se debe comprobar que no haya omitido ningún componente controlable importante y que no se haya rechazado ninguna interacción que sea relevante para la solución.

Se debe corroborar la opinión de todo el equipo responsable en la toma de decisiones y cuyas conclusiones se tengan en el análisis que fundamenta el diseño.

#### **Implementación de la solución al sistema**

Una vez se tenga la solución con el modelo en estudio, representación matemática y restricciones, función objetivo, hay que corroborar que la técnica que resuelve este sea aplicada correctamente al sistema en estudio.

02

# CAPÍTULO II



## Definición de modelo determinístico

Dado un conjunto de  $m$  ecuaciones lineales restringidas con  $n$  variables donde se quiere hallar los valores no-negativos de las variables que satisfacen unas restricciones y maximizando o minimizando una función lineal, llamada función objetivo que conforman las variables.

El método determinístico nos ayuda a evaluar posibles soluciones factibles de un problema planteado y formulado entre muchos, hasta lograr obtener la solución óptima.

Estos modelos son una herramienta que sirve para la toma de decisiones en el mundo empresarial, financiero, organizacional, político y económico, dando alternativas de solución que son aplicadas con el fin de optimizar la utilización de los recursos disponibles en las empresas y organizaciones en general.

## Planteamiento del problema

Existe una gran cantidad de problemas dentro de los procesos productivos, administrativos y financieros, que requieren de la aplicación de una técnica determinada para su solución; esta técnica nos la facilita los modelos lineales, a través de los diferentes métodos con que cuenta.

Generalmente, los problemas que se plantean solucionar por medio de los diferentes modelos ya expuestos (método gráfico, simplex, gran M, análisis postóptimo, dual, dual simplex, transporte y asignaciones), y deben ser planteados de la siguiente forma:

- a. Identificar las variables de decisión necesarias para la solución del problema.
- b. Formular la **función objetivo**,  $(F,O)$  que se va a optimizar, ya sea maximizando o minimizando.
- c. Formular las restricciones con el fin de demarcar la disponibilidad de los recursos limitados para formular el problema.
- d. Cumplir la propiedad de proporcionalidad. Significa que la función objetivo y las restricciones deben guardar una proporcionalidad en el ámbito de contribución de cada variable, de acuerdo con una disponibilidad de recursos.
- e. Cumplir la propiedad de divisibilidad. Es decir, que sea posible asignarles valores fraccionarios a las variables. Esta es una consideración importante en los casos en que se trabaje con sistemas de producción o asignación de artículos discretos. En tanto que no es posible garantizar que las soluciones encontradas, los valores de sus variables sean enteras.
- f. Cumplir la propiedad de actividad. Significa que la función objetivo sea la suma de las contribuciones de las variables. Esto es que el total

## Investigación de operaciones determinística

**E**s aquella que cuenta con una base fundamental como es el modelo matemático previamente definido, para buscar una solución óptima.

### Modelo lineal

Consiste en una función lineal sujeta a restricciones lineales; estructurada mediante un algoritmo matemático, que brinda una amplia gama de soluciones factibles hasta obtener una óptima.

En la investigación de operaciones determinística se tiene una serie de métodos lineales, los cuales contienen una estructura matemática bastante útil, para obtener una solución óptima según el tipo problema que se tenga a resolver, entre otros podemos mencionar: el método gráfico, simplex, gran M, análisis postóptimo, dual, dual simplex, transporte y asignaciones. Agrupados en la rama de la programación lineal.

sea igual a la suma de las partes y que no hay efecto de interacción entre los niveles de cada variable.

- g. Cumplir la condición de no negatividad. Que todas las variables que se vayan a utilizar dentro del problema a resolver deben ser de la condición fundamental y necesaria, mayores e iguales a cero ( $x_j \geq 0$ ); ya que no es posible producir u obtener valores negativos de las variables como resultado.

En el planteamiento del problema se hace necesario realizar un análisis conceptual básico de las variables a considerar, ya sea realizando suposiciones y simplificaciones de tal forma que se logre una estructura ideal del modelo.

Así mismo, en la formulación del problema se requiere que el diseñador seleccione y aísle del entorno total, todos aquellos aspectos de la realidad que no son pertinentes para su fundamentación. Ello nos permite analizar en las empresas, organizaciones y tipos de negocios solamente lo que nos ocupa de las decisiones y objetivos necesarios para la formulación del problema, los cuales deben ser identificados y definidos de un modo explícito.

Cuando se va a construir un modelo de optimización, el problema más significativo es plantear las variables de decisión, que lo formarían; para ello se presenta el siguiente diagrama estructural de las variables a considerar, el cual representa la problemática tanto interna como externa a analizar, estas pueden ser de dos formas: endógenas y exógenas.

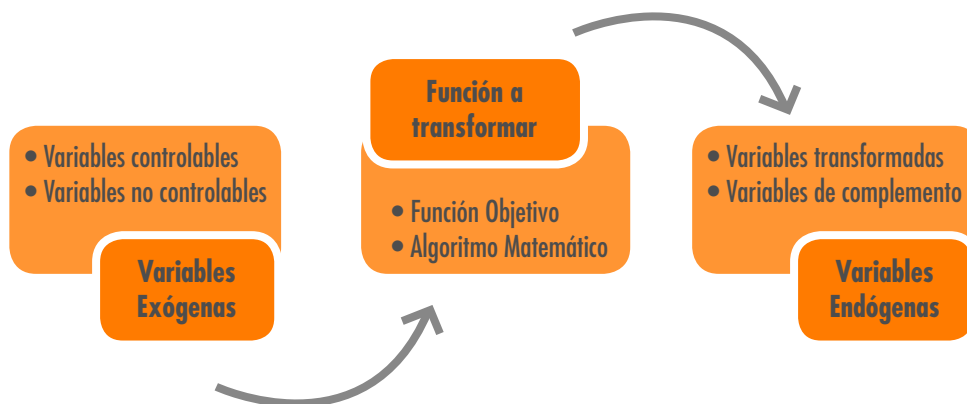


Figura 5. Diagrama de variables exógenas y endógenas  
Fuente. Elaboración propia

Al identificar las variables de entrada; las definimos como **variables exógenas**, las cuales a su vez están divididas en **variables controlables** que son las que maneja los directivos (gerente), y **variables no controlables** que están bajo control de otras personas o del entorno.

Por su parte, las **variables endógenas** se pueden considerar como **variables transformadas**, y permiten establecer qué tanto se ha cumplido con los objetivos y metas; llamadas también **variables de complemento**, son variables

que indican otras posibles alternativas que se pueden considerar en la solución del modelo. Las variables transformadas tienen gran relevancia porque conllevan aquellas consideraciones utilizadas que indican qué tanto se ha logrado respecto a lo planeado. Por esta razón, a las variables transformadas se les llama **variables optimizadas**.

En cuanto a la **función a transformar**; esta también se divide en dos; función objetivo y algoritmo matemático, aquí es donde mediante el modelo matemático encontrado, se transforman las variables y salen transformadas según condiciones planteadas en el problema principal.

## Pasos para formular el modelo

Al formular el modelo, se requiere de una estructura matemática, conformada por una serie de parámetros, los cuales se deben plantear de la siguiente manera.

- Definir las variables de decisión ( $x$ ); estas son las que se han identificado como la solución del problema, las cuales pueden variar desde un  $x_1$ ,  $x_2$ , .....  $x_n$ . El número de variables a considerar depende del problema a resolver. Estas variables deben argumentarse cuando se esté elaborando el modelo, en su dimensión y unidad de medida.
- Definir la función objetivo: (F, O). Es la función elaborada para lograr la optimización de las variables del problema, las cuales deben estar interrelacionadas para poder generar un “resultado total”, es decir, puede dejarse de fabricar un producto (variable) para fabricar o utilizar una mayor cantidad de otro producto (variables).
- Definir las restricciones: (C, S, R) que significa “con las siguientes restricciones”; las cuales deben estar relacionadas con la disponibilidad y uso de los recursos, esto quiere decir que existen limitaciones en la disponibilidad de recursos para el cubrimiento de la demanda; los cuales deben ser de forma lineal.
- Definir la condición de no negatividad, ello significa que los valores de las variables deben ser mayores o iguales a cero.
- Definir el modelo matemático. Una vez se han definido los anteriores pasos, se procede a elaborar el modelo matemático.

## Formulación del modelo

Una vez elaborados los anteriores pasos, procedemos a formular el modelo de acuerdo con el algoritmo matemático requerido según el problema, así:

- Variable de decisión: existen dos tipos de variables de decisión; una sin referencia y otra con referencia; entendiéndose con referencia, por ejemplo

una empresa que posee varios centros de distribución, la referencia sería los centros de distribución.

- b. Variable de decisión sin referencia; como por ejemplo una empresa que produce varios productos.

$$X_j \text{ para toda } j=1,\dots,n$$

Donde la variable x, es la que vamos a optimizar según tipo de problema, y el subíndice "j" nos indica cuántas son las variedades de productos a considerar en el problema.

- c. Variable decisión con referencia; aquella que tiene un centro de origen y varios lugares a donde llegar, la forma de esta variable es como sigue:

$$X_{ij} \text{ para todo } i=1,\dots,m ; j=1,\dots,n$$

Donde la variable x, es la que vamos a optimizar según tipo de problema, tiene dos subíndices, el subíndice "i" que nos indica los lugares relacionados con las variables, y el subíndice "j" nos indica cuántas son las variedades de esas variables a considerar en el problema.

- d. La función objetivo (F, O); corresponde a la función que vamos a optimizar; esta función puede tomar dos formas para su optimización, una buscando maximización y otra buscando minimización, su forma matemática es como sigue:

Sin referencia:

$$\text{Max o Min}(Z)=C_1 X_1+C_2 X_2+C_3 X_3+\dots+C_n X_n$$

En una forma general será:

$$\text{Max o Min } f(x)=\sum_{j=1}^n C_j X_j$$

Con referencia sería:

$$\text{Max o Min}(Z)=C_{11} X_{11}+C_{12} X_{12}+C_{21} X_{21}+\dots+C_{mn} X_{mn}$$

En una forma general será

$$\text{Max o Min } f(z)=\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

Las restricciones serán las limitaciones de los recursos disponibles con que se cuenta para la solución del problema. Estas presentan la siguiente estructura matemática:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & X_{2n} \\ X_{m1} & X_{m2} & X_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix}$$

Formada a partir de dos matrices, la matriz de los coeficientes técnicos y la matriz de las variables, igualado al vector de los recursos disponibles.

La condición de no negatividad; que corresponde a que todas las variables contempladas en el modelo deben ser positivas es decir mayores e iguales a cero.

$$X_j \text{ o } X_{ij} \geq 0 \text{ donde} \\ i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n$$

La formulación del modelo matemático; que es la representación de todas las anteriores expresiones, se resume así:

Sin referencia

$$\text{Max o Min}(Z)=C_1 X_1+C_2 X_2+C_3 X_3+\dots+C_n X_n \\ \text{c.s.r}$$

$$a_{11} x_1+a_{12} x_2+a_{13} x_3+\dots+a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1+a_{22} x_2+a_{23} x_3+\dots+a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\dots+\dots+\dots+\dots+\dots+\dots$$

$$\dots+\dots+\dots+\dots+\dots+\dots$$

$$a_{m1} x_1+a_{m2} x_2+a_{m3} x_3+\dots+a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$X_j \geq 0 \text{ Para } i=1,\dots,m ; j=1,\dots,n$$

Con referencia

$$\begin{aligned} \text{Max o Min}(Z) &= C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{13} X_{13} + \dots + C_{mn} X_{mn} \\ \text{c.s.r} \\ a_{11} x_{11} + a_{12} x_{12} + a_{13} x_{13} + \dots + a_{1n} x_{1n} &\leq b_1 \\ a_{21} x_{21} + a_{22} x_{22} + a_{23} x_{23} + \dots + a_{2n} x_{2n} &\leq b_2 \\ \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots &\dots \\ \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots &\dots \\ a_{m1} x_{m1} + a_{m2} x_{m2} + a_{m3} x_{m3} + \dots + a_{mn} x_{mn} &\leq b_m \\ X_{ij} &\geq 0 \text{ Para } i=1, \dots, m; j=1, \dots, n \end{aligned}$$

### Conceptualización y equivalencias

El término  $C_{ij}$  es el coeficiente de contribución, es decir mide el aporte de las variables a la optimización de la función.

Por su parte, el término  $a_{ij}$  coeficiente técnico es un valor estandarizado de acuerdo con un estudio de tiempo y movimientos, que indica lo requerido por la variable, según la disponibilidad de recursos. Ello se puede expresar como la cantidad de recurso  $j$  que se necesita por cada unidad de la actividad  $i$ .

El  $b_i$  significa la cantidad de recursos con que se cuenta para resolver el problema. Mientras que la  $X_{ij}$  es la cantidad de unidades de la actividad  $i$  obtenida del recurso  $j$ .

**Solución factible.** Es aquella solución que satisface las condiciones limitantes de los recursos.

**Solución factible básica.** Es la que se posee con no más de  $m$  componentes positivos.

**Solución básica factible degenerada.** Es el caso cuando hay menos de  $m$  componentes positivos de las variables  $X$ ; ello quiere decir que en el área de solución existe un valor cero.

**Región de factibilidad.** Es el conjunto de todas las posibles soluciones factibles.

**Convexidad.** Cuando existe una solución factible, hay una región convexa. Una región es convexa, si un plano es convexo; un subconjunto del plano es convexo; si para cada par de puntos  $A, B$  los puntos contienen todo el segmento rectilíneo que los conecta.

Ejemplo de un área convexa

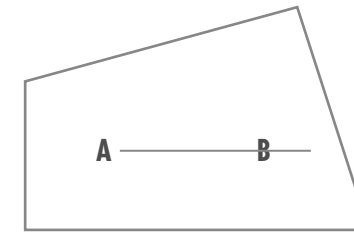


Figura 6. Plano convexo  
Fuente: Elaboración Propia

$$\text{Max o Min } f(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

Ejemplo de un área no convexa

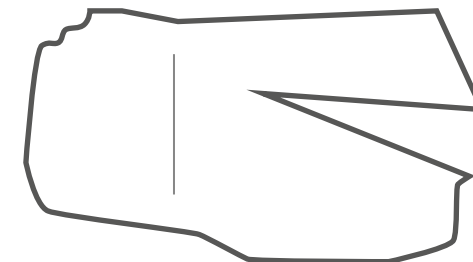


Figura 7. Plano no convexo  
Fuente: Elaboración Propia

Un ejemplo de una región convexa en tres dimensiones es una esfera (poliedro convexo).

La parte común de dos regiones convexas es también una región convexa, la siguiente figura nos determina esta situación.

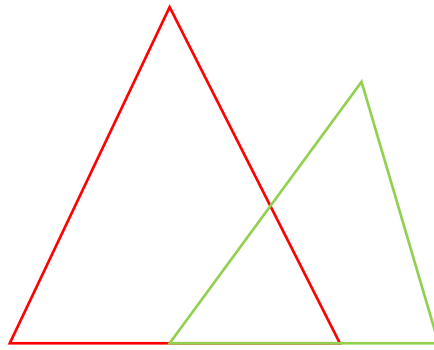


Figura 8. Plano de regiones convexas  
Fuente: Elaboración propia

Si se escoge un punto arbitrario  $M$  que no pertenezca a un polígono convexo dado, siempre podemos hallar una recta  $PQ$  tal que el punto  $M$  y el polígono se encuentran en lados opuestos de ella.



Figura 9. Punto fuera del plano no convexo  
Fuente: Elaboración Propia

Dado un polígono convexo puede trazarse cualquier número de rectas tales que cada una tiene por lo menos un punto en común con el polígono y son llamados “Rectas de Apoyo”

En el punto  $P$  se habla de “Plano de apoyo”.

Es útil pensar que el problema del modelo lineal mediante la programación lineal se puede representar en un espacio de  $n$  – dimensiones. La región de soluciones factible es una región convexa o conjunto convexo, con esquinas o puntos extremos y si existe una solución óptima, es un punto de donde se halle.

En lo relacionado a las equivalencias tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Max o Min } f(x) &= \sum_{j=1}^n C_j X_j \\ \text{C.S.R.} & \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j &\leq b_j \\ x_j &\geq 0 \text{ para } j=1, \dots, n \end{aligned}$$

El signo de la desigualdad en las restricciones puede ser de la forma menor igual o mayor igual o igual, según las limitaciones de los recursos.

- Si se va a maximizar  $CX$ , es equivalente a minimizar  $-CX$
- Si se va a minimizar  $CX$ , es equivalente a maximizar  $-CX$
- La desigualdad  $AX \leq b$ , es equivalente a  $-AX \geq -b$
- La desigualdad  $AX \geq b$ , es equivalente a  $-AX \leq -b$

Cuando el valor de la función objetivo “ $Z$ ” es finita significa que al menos una esquina de la región factible fue óptima. Si la solución óptima no fue única, hay puntos que no son esquinas y fueron óptimos.

## Importancia de la formulación

La formulación es quizás la actividad más importante en la solución de un problema de lineal, ya que al no contarse con un modelo bien definido en su formulación no hay solución factible ni óptima del problema. Es necesario realizar un análisis riguroso del problema a resolver para identificar las variables que se requieren optimizar, y no correr el riesgo de resolver un modelo infactible.

## Características del modelo lineal

En la formulación de un modelo lineal, se debe tener en cuenta lo siguiente:

- La condición de linealidad; es decir no se deben considerar las siguientes expresiones;  $X_1 X_2$ ;  $a^2 X_1$ ;  $X_1^2 a_1$ ;  $\text{Log } X_1$ .
- No se aceptan expresiones en restricciones  $x_j < 0$ ; es decir, tener valores de variables negativas.
- No contar con limitaciones de recursos negativos ( $-b_j$ )

4. La función objetivo (F.O) que tenga la expresión  $Max z = -X_1 - 2X_2$  se puede multiplicar por  $(-1)$ , dando como resultado  $Min z = X_1 + 2X_2$
5. El modelo asume algunas propiedades de aditivas y multiplicativas:
  - a. Si el producto A necesita 1 hora de la actividad 1 y el producto B 1.5 horas de la actividad 1, ambas necesitan 2.5 unidades.
  - b. Si una unidad del producto 1 necesita 3 horas; 6 necesitan 18 horas
6. Cuando se hable de m restricciones no se incluye la condición de no negatividad.
7. La variable  $X_j$  puede ser no entera, por ejemplo 5.3 unidades
8. Un conjunto de variables  $X_j$  que cumpla las m restricciones es una posible solución al problema.
9. Si todas las variables sin  $X_j \geq 0$  es una solución factible.
10. Si todas las variables de la solución factible optimizan la F.O es una solución factible óptima.

# 03

# CAPÍTULO III

## Formulación de Casos

**E**n el presente capítulo se plantearán varios casos relacionados con problemas de las empresas, organizaciones, negocios y financieros, de tal manera que se logre el entendimiento de cómo aplicarse los diferentes pasos para lograr un buen modelo y se pueda resolver cualquiera de los modelos lineales.

### Caso 1

La empresa Babilonia produce tres variedades de productos para comercializarlos en el mercado nacional, la demanda actual del mercado es de 20000 unidades. Para producir una unidad del producto 1, se requieren cuatro unidades de materia prima y seis de insumos; para producir una unidad del producto 2, se requieren tres unidades de materia prima y siete de insumo, para producir una unidad del producto 3 se requieren cinco unidades de materia prima y cuatro de insumos; la disponibilidad de materia prima en el mercado es de 30000 unidades y de insumo 54000 unidades. Además, los productos requieren para su producción, 60, 45 y 53 horas de mano de obra, respectivamente, y cuenta con una disponibilidad total de 4500 horas. Si los

productos se venden a \$ 250 pesos por unidad del producto 1, \$ 310 pesos por unidad del producto 2, y \$ 270 pesos por unidad del producto 3.

¿Determine cuántas unidades deben producirse de cada producto?, y ¿cuánto serían sus ingresos totales? Formule un problema y aplique las técnicas de los modelos lineales para encontrar una solución óptima.

#### Solución:

- Primer paso:

Definir la variable de decisión

$X_1$  = Cantidad de unidades a producir del producto 1 (u)

$X_2$  = Cantidad de unidades a producir del producto 2 (u)

$X_3$  = Cantidad de unidades a producir del producto 3 (u)

- Segundo Paso:

Definir la Función Objetivo

Maximizar  $I = 250 \$/u * X_1(u) + 310 \$/u * X_2(u) + 270 \$/u * X_3(u)$

- Tercer Paso:

Definir las Restricciones

Materia Prima:  $4 \text{ (u.m.p) } /u * X_1(u) + 3 \text{ (u.m.p) } /u * X_2(u) + 5 \text{ (u.m.p) } /u * X_3(u) \leq 30000 \text{ u.m.p}$

Insumos:  $6 \text{ u.ins} /u * X_1(u) + 7 \text{ u.ins} /u * X_2(u) + 4 \text{ u.ins} /u * X_3(u) \leq 54000 \text{ u.ins}$

Mano Obra:  $60 \text{ h} /u * X_1(u) + 45 \text{ h} /u * X_2(u) + 53 \text{ h} /u * X_3(u) \leq 4500 \text{ h}$

- Cuarto Paso:

Condición no negatividad  $X_j \geq 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$

#### Modelo Matemático

$$\text{Max } I_1 = 250X_1 + 310X_2 + 270X_3$$

C.S.R.

$$4X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 30000$$

$$6X_1 + 7X_2 + 4X_3 \leq 54000$$

$$60X_1 + 45X_2 + 53X_3 \leq 4500$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

### Caso 2

Un banco de nuestro medio actualmente está analizando cuál puede ser su estrategia comercial en créditos para el próximo semestre. Para ello destina un monto de \$ 20.000.000. Dentro de sus condiciones está obligada a prestar su servicio sin exclusividad de clientes e igualmente dar créditos a sus clientes. La tabla siguiente señala las líneas de crédito, tasa de interés a cobrar (E. T), cartera irrecuperable, es decir que los clientes dejen de cancelar su obligación con el crédito dado. La tasa de interés a cobrar es mensual.

El mercado competitivo con otros bancos, le indican que debe asignar el 45 % del monto destinado para créditos para la línea industrial y comercial; y para vivienda al menos un 45 % de los préstamos personales de actividad agrícola. El banco considera que dentro de su política de pagos de difícil cobro no puede ser de más de un 3.5%. Se supone que el cliente que no paga, es cartera de difícil cobro, y por lo tanto no se reciben intereses. ¿Qué sugeriría a las directivas? Formule un modelo de problema de programación lineal.

Tabla III-1 Información Básica

Prestamos	Tasa de Interés (%)	Probabilidad Cartera Dificil cobro (%)
Industrial	3.5	4
Comercial	3.0	3
Vivienda	2.5	2
Personales	4.0	12
Agrícola	2.0	6

Solución:

- Primer Paso:**

Definimos la variable de decisión

$X_1$  = Cantidad de Dinero (\$) destinado a crédito Industrial (\$)   
 $X_2$  = Cantidad de Dinero (\$) destinado a crédito Comercial (\$)   
 $X_3$  = Cantidad de Dinero (\$) destinado a crédito Vivienda (\$)   
 $X_4$  = Cantidad de Dinero (\$) destinado a crédito personal (\$)   
 $X_5$  = Cantidad de Dinero (\$) destinado a crédito Agrícola (\$)

- Segundo Paso:**

Definimos la función objetivo

Donde R. Neto = Rendimiento neto

$$\text{Maximizar R. Neto} = 0.1087*(.96X_1 (\$)) + 0.0927*(0.97X_2 (\$)) + 0.0769*(0.98X_3 (\$)) + 0.1249*(0.88X_4 (\$)) + 0.0612*(0.94X_5 (\$))$$

En una forma simplificada

$$\text{Máx RN} = 0.1044X_1 (\$) + 0.0899X_2 (\$) + 0.0754X_3 (\$) + 0.1099X_4 (\$) + 0.0575X_5 (\$)$$

- Tercer paso:**

Definimos las restricciones

Monto destinado a crédito

$$X_1(\$) + X_2(\$) + X_3(\$) + X_4(\$) + X_5(\$) \leq \$20.000.000$$

Monto destinado a créditos industrial y comercial

$$X_1(\$) + X_2(\$) \leq 0.45*(\$) 20.000.000$$

Es decir:

$$X_1(\$) + X_2(\$) \leq \$ 9.000.000$$

Monto préstamos vivienda

$$X_3(\$) \geq 0.45*(X_1(\$) + X_2(\$) + X_3(\$))$$

Es decir:

$$-0.45X_1 (\$) - 0.45X_2 (\$) + 0.55X_3 (\$) \geq 0$$

Límite cartera difícil cobro

$$0.04X_1 (\$) + 0.03X_2 (\$) + 0.02X_3 (\$) + 0.12X_4 (\$) + 0.06X_5 (\$) \leq 0.035*(X_1 (\$) + X_2 (\$) + X_3 (\$) + X_4 (\$) + X_5 (\$))$$

Es decir

$$0.005X_1 (\$) - 0.005X_2 (\$) - 0.015X_3 (\$) + 0.085X_4 (\$) + 0.025X_5 (\$) \leq 0$$

- Cuarto paso:**

Definir la condición de no negatividad

Restricción de no negatividad

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

- Quinto paso:**

Definir el modelo matemático

$$\text{Maximizar R. Neto} = 0.1044X_1 + 0.0899X_2 + 0.0754X_3 + 0.1099X_4 + 0.0575X_5$$

C.S.R.



$$\begin{aligned}
 X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 &\leq 20.000.000 \\
 X_1 + X_2 &\leq 9.000.000 \\
 0.45X_1 - 0.45X_2 + 0.55X_3 &\geq 0 \\
 0.005X_1 - 0.005X_2 - 0.015X_3 + 0.085X_4 + 0.025X_5 &\leq 0 \\
 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

### Caso 3

Una persona se gana un baloto de \$ 100 millones de pesos y le recomiendan sus amigos que los invierta en dos tipos de acciones de la bolsa de valores de Colombia, acciones A y acciones B, las acciones A tienen menor riesgo y producen un beneficio del 6 %, las acciones B, tienen un mayor riesgo y producen un beneficio del 9 %. Sus amigos, después de varias deliberaciones, le recomendaron varias formas de cómo realizar la inversión. Teniendo en cuenta las recomendaciones, optó por lo siguiente: Invertir como máximo \$ 50 millones de pesos, en la compra de acciones B y por lo menos \$ 20 millones de pesos, en acciones A. Además, decide que lo invertido en B sea por lo menos igual a lo invertido en A. ¿Cómo debería invertir los \$100 millones de pesos de tal manera que su beneficio sea el máximo?

**Solución:**

- **Primer paso:**

Definir las variables de decisión

$X_1$  = Cantidad de dinero a invertir en la acción A (\$)

$X_2$  = Cantidad de dinero a invertir en la acción B (\$)

- **Segundo paso:**

Maximizar  $B = 0.06 * X_1 ($) + 0.09 * X_2 ($)$

- **Tercer Paso:**

Definir las restricciones

Restricción de presupuesto de inversión

$$X_1 ($) + X_2 ($) \leq 100 ($) \text{ millones}$$

Restricción de monto de la inversión en acción A

$$X_1 \leq 20 ($) \text{ millones}$$

Restricción de monto de la inversión en acción B

$$X_2 \leq 50 ($) \text{ millones}$$

Restricción de proporcionalidad

$$X_2 ($) \geq X_1 ($)$$

- **Cuarto paso:**

Condición de no negatividad

$$X_{ij} \geq 0 \text{ para todo } i = 1 \dots m \text{ y todo } j = 1 \dots n$$

- **Quinto paso:**

Definir modelo matemático

$$\text{Maximizar Beneficio} = 0.06X_1 + 0.09X_2$$

**C.S.R**

$$X_1 + X_2 \leq 100$$

$$X_1 \geq 20$$

$$X_2 \leq 50$$

$$-X_1 + X_2 \geq 0$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

# 04

# CAPÍTULO IV

**E**n la investigación de operaciones se cuenta con diferentes métodos para determinar una solución óptima, cada método cuenta a su vez con un modelo matemático que lo sustenta.

## Método Gráfico

Se presenta cuando hay solamente problemas de dos variables, la solución puede hallarse gráficamente. (También puede usarse este método cuando hay tres variables, pero su solución es más compleja).

### Pasos Para Su Solución

- Convertir las desigualdades en igualdades, reemplazando los signos  $\leq$ ,  $\geq$  por el signo  $=$ ; este cambio genera líneas rectas.
- Tabular cada restricción de acuerdo con las técnicas de las matemáticas, para hallar los puntos de corte en el plano cartesiano  $P(X_1, X_2)$ .
- Representar los puntos hallados en el plano  $P(X_1, X_2)$ , en el primer cuadrante, donde se generan las áreas positivas de soluciones factibles de acuerdo con la condición de no negatividad.
- Graficar las restricciones convertidas en ecuaciones de línea recta en el plano  $P(X_1, X_2)$ , utilizando flechas en cada restricción para ver el sentido de estas y determinar la región que debe considerarse como parte del espacio de solución.
- Determinar el área de soluciones factibles, o polígono de solución factible. Que debe ser igual al área común resultante de representar las restricciones en el plano  $P(X_1, X_2)$ .

- f. Escoger como solución óptima el vértice del espacio de soluciones factible que maximice o minimice la función objetivo. Determinar los valores de las variables.

**Ejemplo 1**

Dado el siguiente modelo matemático:

$$\begin{aligned} \text{Máx } z &= 5x_1 + 3x_2 \\ \text{C. S. R.} \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Determinar una solución óptima, para una de las variables.

**Solución Manual:**

- **Primer Paso:**

Transformar las restricciones en igualdades como sigue:

Restricción 1     $3x_1 + 5x_2 \leq 15$                        $3x_1 + 5x_2 = 15$

Restricción 2     $5x_1 + 2x_2 \leq 10$                        $5x_1 + 2x_2 = 10$

- **Segundo Paso:**

Se realiza la tabulación restricción 1

$$3x_1 + 5x_2 = 15$$

$x_1$	0	5
$x_2$	3	0

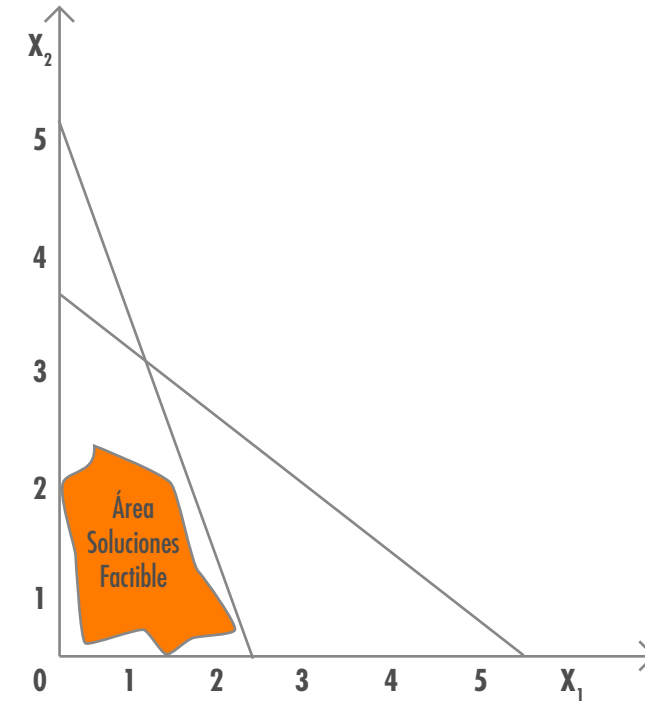
Se realiza la tabulación restricción 2

$$5x_1 + 2x_2 = 10$$

$x_1$	0	2
$x_2$	5	0

- **Tercer Paso:**

Representar en el plano  $P(x_1, x_2)$



Gráfica 1 Área de soluciones factible

- **Cuarto Paso:**

Hallar los vértices desconocidos

Para ello, mediante el sistema de igualación, eliminamos una variable como sigue:

$$3x_1 + 5x_2 = 15$$

$$5x_1 + 2x_2 = 10$$

Para igualar una variable multiplicamos la restricción 1 por 5 y la restricción 2 por (-3), obteniendo:

$$15x_1 + 25x_2 = 75$$

$$-15x_1 - 6x_2 = -30$$

$$0 \quad 19x_2 = 45 \quad \text{Despejando } x_2 = 2.36$$

Reemplazamos en la primera restricción para buscar el valor de la variable  $x_2$  como sigue.

$$3x_1 + 5(2.36) = 15 \quad 3x_1 + 11.8 = 15 \quad x_1 = 1.05$$

Por lo cual, el punto de corte desconocido es de coordenadas p (1.05, 2.37)

• **Quinto Paso:**

Buscamos el vértice óptimo del área de soluciones factible, para ello reemplazamos los valores de cada vértice en la función objetivo:

$$\text{Máx } z = 5x_1 + 3x_2$$

Solución factible en el vértice p (0, 0); Máx Z = 5(0) + 3(0) = 0

Solución factible en el vértice p (0, 3); Máx Z = 5(0) + 3(3) = 9

Solución factible en el vértice p (1.05, 2.37); Máx Z = 5(1.05) + 3(2.37) = 12.37 \*

Solución factible en el vértice p (2, 0); Máx Z = 5(2) + 3(0) = 10

Como se está maximizando, se selecciona el mayor valor de estos; obteniendo como solución óptima que  $X_1^* = 1.05$  y  $X_2^* = 2.37$  y  $Z^* = 12.37$

Otra forma es aplicando un software, tal como WinQSB, el cual dará una solución gráfica del problema. Por otro lado, Excel también cuenta con la herramienta Solver, sin embargo, esta no ofrece solución gráfica.

Utilizando el software del WinQSB tendríamos la siguiente solución:

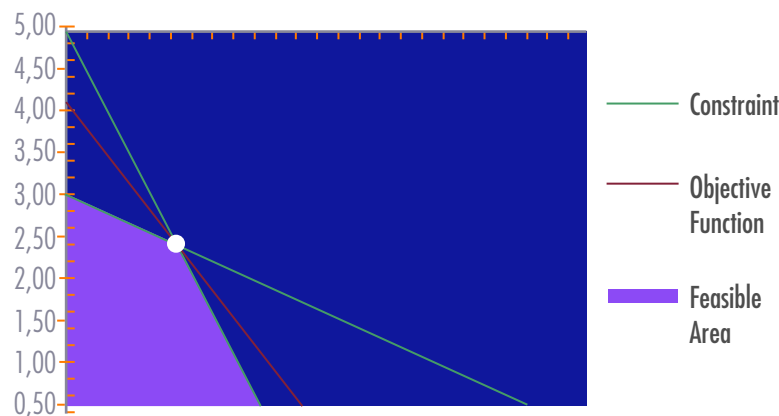


Gráfico 2. Área de solución factible  
Fuente. Software WinQSB

Donde podemos observar el área de soluciones factible sombreada de color rojizo y el vértice de solución óptima como un punto blanco, la línea roja es una paralela al área de soluciones factible, que demarca el punto óptimo al tocarlo de primero.

Como se observa, la solución es igual a la que se obtiene al hacerlo de manera manual.

## Método Simplex

Otro de los modelos que tiene la investigación de operaciones determinística en la parte de la programación lineal es el método simplex, que sirve para solucionar problemas que tengan dos o más variables de decisión.

Al considerar problemas que tengan varias variables de decisión, sus cálculos matemáticos son más complejos, para obtener una solución factible óptima. Se tiene que la solución óptima de un determinado problema se halla en uno de los puntos extremos del polígono de soluciones factible, esto nos indica que cada vértice del polígono es una solución factible básica. Con el método simplex podemos recorrer todos los vértices del polígono de soluciones factible si es el caso, hasta encontrar el vértice que contiene la solución óptima del problema, como se puede observar en la figura 10.

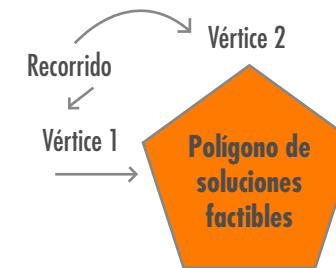


Figura 10. Polígono de soluciones factible  
Fuente: elaboración propia

En cada vértice se encontrará una solución, llamadas soluciones factibles básicas. Al realizar el recorrido entre cada vértice, se puede ahorrar tiempo y trabajo. Si se utilizara el método gráfico para este tipo de problemas, por tratarse de variables múltiples el procedimiento sería en exceso complejo y en algunos puntos imposible. Sin embargo, el Método Simplex lo realiza a través de ecuaciones de procedimiento algebraicos.

El recorrido entre vértices se llama "iteración", y a partir de este movimiento las variables y la función se transforman y se obtienen nuevos valores para el vértice siguiente, esos nuevos valores son la solución factible básica.

Para realizar el recorrido el modelo matemático del problema debe sufrir variaciones, ya que está formado por inecuaciones en vez de ecuaciones, las cuales son muy difíciles de tratar en el álgebra. Para ello, el Método Simplex se vale de algunos cambios que se realizan en las inecuaciones como es el caso de cambiar las desigualdades en igualdades cuando estas son menores o iguales, agregando una variable llamada de “holgura” ( $X_H$ ) o de relleno. Si la desigualdad es mayor igual se cambia a través de agregar una variable de holgura en forma negativa y una “variable de superávit” llamada también “variable artificial” en forma positiva; el procedimiento es el siguiente.

Consideremos el siguiente caso; se tiene una restricción como sigue:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 20$$

¿Cómo poder llevar esta inecuación a una ecuación?

Para ello, primero agregamos una variable de holgura:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_H = 20$$

Donde  $x_H$  es la variable de holgura. Esta ecuación equivale a:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 20$$

Donde se destruye la desigualdad por una igualdad y se trabaja como una ecuación lineal.

Si la desigualdad de la restricción original es de forma  $x_4 \geq 0$ , el procedimiento para destruir la desigualdad sería el siguiente:

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 20$$

Multiplicamos por menos uno (-1) la restricción, obteniendo:

$$-X_1 - X_2 - X_3 \leq -20$$

Agregamos una variable de holgura y restamos una artificial para destruir la desigualdad y la negatividad del valor bi, dando como resultado:

$$-X_1 - X_2 - X_3 + X_4 - X_5 = -20$$

Multiplicamos por (-1) nuevamente la ecuación resultante, así:

$$X_1 + X_2 + X_3 - X_4 + X_5 = 20$$

Donde podemos observar que para este caso se resta una variable de holgura y se suma una artificial, con ello se subsana el problema de la desigualdad mayor igual.

¿Qué pasa con la función objetivo?

En el caso de la desigualdad menor igual, la función será:

$$\text{Máx. } z = 5x_1 + 9x_2$$

Así, con la variable de holgura sería:

$$\text{Máx. } z = 5x_1 + 9x_2 + 8X_3 + 0X_4$$

Donde la variable de holgura sería positiva de coeficiente igual a cero, indicando que su aporte es cero a la optimización de la función.

En el caso de la desigualdad mayor igual maximizando la función objeto, se tendría:

$$\text{Máx. } z = 5x_1 + 9x_2 + 8X_3 + 0X_4 - MX_5$$

Si es minimizando:

$$\text{Min. } z = 5x_1 + 9x_2 + 8X_3 + 0X_4 + MX_5$$

Donde a la variable artificial se le agrega como coeficiente un valor de “M” y la “M” significa un valor muy grande.

Un problema por el método simplex, tiene dos maneras de solucionarse; el método algebraico y el método de simplex; este último se puede realizar a su vez de dos formas por eliminación de Gauss o por el método de la tabla de simplex.

Si hay  $m$  ecuaciones con  $n$  variables ( $n \geq m$ ); una solución básica se obtiene haciendo iguales a cero  $n + m$  de las variables, resolviendo para  $m$  variables que quedan ( $m$  ecuaciones,  $n$  variables) son no negativas ( $\geq 0$ ). Una solución básica factible no degenerada, es una solución básica con las cuales todas las  $n$  variables son positivas, es decir son ( $\geq 0$ ). Las  $n$  variables se conocen como variables básicas en la base o variables, mientras que las  $n + m$  variables que quedan se conocen como no básicas y son iguales a cero.

### Complicaciones del Método simplex

Supongamos el siguiente modelo matemático:

$$\text{Máx. } z = 12x_1 + 14x_2 \\ \text{C.S.R.}$$

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 20 \\ X_2 &\leq 18 \\ 4X_1 + 5X_2 &\leq 32 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Caso I. Minimización en la función objetivo:**

Multiplicar por menos uno (-1)

$$\text{Min. } Z = -5x_1 - 9x_2$$

Es equivalente a

$$(-) \text{ Máx. } z = 5x_1 + 9x_2$$

- a. Si la función es minimizar se multiplica por menos uno (-1) y se trabaja como si estuviera maximizando.

**Caso II. Desigualdad en ambas direcciones**

Es decir, la restricción es de la forma ( $\geq$ ) en vez de ( $\leq$ )

Dada la siguiente restricción

$$4x_1 + 3x_2 \geq 21$$

Se multiplica por (-1); su equivalente es

$$-4x_1 - 3x_2 \leq -21$$

**Caso III. Si los bi son negativos.**

El problema aquí es que el lado derecho de la inecuación, es decir que el bi es el valor de la variable básica de esa inecuación. Si es negativo, se viola la condición de no negatividad, ello implica que es una solución degenerada, un caso más común es hacer lo mismo como si fuera mayor igual.

1. Escoger otra variable diferente a las variables de holgura para usarse como variable básica (ello implica mucho más cálculo algebraico, y mucho más tanteo y error para hallar la solución factible, básica no degenerada).
2. Introducir una variable de holgura y una artificial, este artificio tiene como nombre, Método del Gran M.

Supongamos

$$4x_1 + 3x_2 \geq 21$$

Su equivalente es

$$-4x_1 - 3x_2 - X_H + X_A = 21$$

Al introducir las variables  $x_H$  y  $x_A$  se ha eliminado la restricción, ya que el término  $(-x_H + x_A)$  puede asumir cualquier valor; sin embargo, podemos asegurar que el valor de  $x_A$  al final es cero. En la función se tendría el siguiente cambio; supongamos que la función objetivo es  $\text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2$

Su equivalente es

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2 - Mx_A$$

**Caso IV. Cuando hay una restricción con signo igual:**

Esta situación se resuelve descomponiendo en dos restricciones comparables con signos desiguales así.

$$\begin{aligned} 4X_1 + 5x_2 &= 32 \\ 4X_1 + 5x_2 &\leq 32 \\ 4X_1 + 5x_2 &\geq 32 \end{aligned}$$

- a. Donde las dos últimas son equivalentes a la primera.  
b. También se puede hacer eliminando la igualdad, se despeja una variable y reemplaza en las otras restricciones, simplificando el problema.

Al descomponer en dos restricciones la igualdad se tiene una restricción menor igual que se resuelve como el caso uno; y la otra restricción es de signo mayor igual, que se resuelve como el caso tres.

**CASO V. Variables sin restricciones en signo**

Supongamos que la variable  $x_j$  no está restringida a la condición mayor igual a cero, situación que se resuelve así:

Supongamos  $x_1$  no restringida en signo se reemplaza por  $(y_1 - w_1)$  donde  $(y_1 - w_1) \geq 0$  y se sustituye en el modelo original el valor de la  $x_1$ .

Supongamos,

**Modelo original**

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{c.s.r.} \\ 6x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 20 \\ x_1 &\text{ no restringida en signo, } x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**Modelo reemplazando la variable restringida en signo**

Se reemplaza la variable  $x_1$  por  $(y_1 - w_1)$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3(y_1 - w_1) + 2x_2 \\ \text{c.s.r.} \\ 6(y_1 - w_1) + 2x_2 &\leq 12 \\ 4(y_1 - w_1) + 3x_2 &\leq 20 \\ y_1, w_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tabla del Simplex

La estructura de la tabla del simplex es la siguiente.

	$C_1$	$C_1$	.....	$C_n$	
$C_B$	$b_1$	$x_1$	.....	$x_n$	$a/b$
$C_{1B}$	$b_1$	$a_{11}$	.....	$a_{1n}$	$b_1/a_{11}$
$C_{2B}$	$b_2$	$a_{21}$	.....	$a_{2n}$	$b_2/a_{21}$
.	.	.	.....	.	.
.	.	.	.....	.	.
$C_{nB}$	$b_m$	$a_{m1}$	.....	$a_{mn}$	$b_m/a_{m1}$
	$Z_T$	$Z_1 - C_1$	.....	$Z_n - C_n$	

En forma matricial, esta tabla del simplex quedaría

$[C_1 C_2 \dots C_n]$  Vector fila de coeficiente de contribución.

$[x_1 x_2 \dots x_n]$  Vector fila de variables de decisión.

$$\begin{bmatrix} C_{1B} \\ C_{2B} \\ \dots \\ \dots \\ C_{nB} \end{bmatrix} \text{ Vector columna de las variables básicas en la base.}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ Vector de la disponibilidad de recursos.}$$

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{mn} \end{bmatrix} \text{ Matriz de las variables de decisión.}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ Matriz de coeficientes técnicos.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ Matriz de identidad de las variables de holgura.}$$

$$[Z_1 - C_1 \quad Z_2 - C_2 \quad \dots \quad Z_n - C_n] \text{ Vector fila para seleccionar la variable que entra a la base.}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_{1n} \\ b_2 \\ a_{2n} \\ \dots \\ \dots \\ b_m \\ a_{mn} \end{bmatrix} \text{ Vector para seleccionar la variable que sale de la base.}$$

**Regla para cambiar las variables (vectores) de la base**

1. La variable (no básica) que entra a la base  
 Calcule  $z_k - c_k = \min(z_j - c_j)$ ;  $z_j - c_j < 0$ , luego  $x_k$  entra a la base.

2. La variable (básica) que sale de la base

Calcule  $\frac{b_m}{a_{mn}} = \min(\frac{b_m}{a_{mn}})$  donde  $a_{mn} \geq 0$

**Solución del Método simplex**

Normalmente se utiliza para la solución del método simplex, la eliminación de Gauss y el de la tabla del simplex.

Para este caso se utilizará la tabla del simplex, con este procedimiento se trabaja con los coeficientes tanto de la función objetivo como las restricciones.

Supongamos el siguiente ejercicio:

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z &= 10X_1 + 6X_2 \\ \text{C.S.R} \\ 4X_1 + 3X_2 &\leq 17 \\ 6X_1 + 2X_2 &\leq 12 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Se plantea el modelo matemático para llevarlo a la tabla de simplex, transformando las inecuaciones en ecuaciones agregando las variables de holgura igual forma su función objetivo como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z &= 10X_1 + 6X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\ 4X_1 + 3X_2 + X_3 &= 17 \\ 6X_1 + 2X_2 + X_4 &= 12 \end{aligned}$$

Una vez transformado el problema en ecuaciones, construimos la tabla del simplex. Inicialmente se llevan los datos iniciales del problema a la tabla como aparecen a continuación.

Iteración Inicial

	$C_j$		10	6	0	0		
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	b/a	
0	$X_3$	17	4	3	1	0	17/4	4.25
0	$X_4$	12	6	2	0	1	12/6	2.0
	Z	0	-10	-6	0	0		
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$		

- En la primera fila aparecen los coeficientes de las variables en la función objetivo.
- En la segunda fila, la identificación de cada columna según funcionalidad como sigue:
  - Columna 1, los coeficientes de las variables básicas en la base.
  - Columna 2, las variables básicas iniciales, en nuestro caso son las variables de holgura.
  - Columna 3, los valores de los términos independientes de cada restricción.
  - Columna 4, los coeficientes de la primera variable en las restricciones.
  - Columna 5, los coeficientes de la segunda variable en las restricciones.

Columna 6, los coeficientes de la tercera variable en las restricciones.  
Columna 7, los coeficientes de la cuarta variable en las restricciones.

En la última columna de la división entre el término independiente de las restricciones y el coeficiente técnico de la variable seleccionada que entra a la base y la que deja de ser básica.

La última fila son los (z - c), que nos indica cuál variable entra a la base y se vuelve básica. A partir de la tabla inicial anterior, se puede decir que  $Z_1-C_1$  corresponde a la primera variable, se calcula  $Z_1 = 0*4 + 0*6 = 0$ ;  $C_1 = 10$ ; luego  $Z_1-C_1 = (0-10) = -10$  (que aparece con color azul); y así se estiman las otras variables, de ellas se selecciona la más negativa, que se convierte en básica. Ahora seleccionamos la variable que sale de la base, para ello la columna de los (b/a) como sigue.

Dividimos el valor de  $b_1$  por el coeficiente técnico de la variable seleccionada entrar a la base (17/4), de igual forma para la restricción dos (12/6), los resultados obtenidos son (4.25; 2.0), de estos resultados se selecciona la menor positiva, que aparece con color verde, las flechas indican cuál entra y cuál sale, el cruce de las dos en la matriz de coeficientes técnico se llama elemento pivote que aparece con color naranja. Cada recorrido entre vértices del polígono de área de soluciones factible se llama "iteración". Una vez realizado el proceso de cuál variable **entra** y cuál **sale**, se procede a realizar la primera iteración, que dará los siguientes resultados.

Iteración 1

	$C_j$		10	6	0	0		
$C_B$	$X_B$	b	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	b/a	
0	$X_3$	9	0	5/3	-2/3	9/5/3	5.4	→
10	$X_1$	2	1	1/3	0	1/6	2/1/3	6.0
	Z	20	0	-8/3	0	5/3		
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$		

Para llevar a cabo esta iteración, se realiza el siguiente procedimiento matemático. La fila donde está el elemento pivote en la tabla anterior se divide por el nuevo valor del elemento pivote.

Las otras posiciones de la nueva tabla se calculan así:

El nuevo valor de la posición de la celda  $b_i$  de la variable  $X_3$  en la base es 9 y se calcula así  $b_n = 17 - ((12*4) / 6) = 9$  en la tabla anterior, está el triangulito que se debe formar para realizar el cálculo, así se hace con todas las posiciones vacías, el triangulito se desdobra y el calcula de la nueva posición de  $X_2$  en la primera fila de la matriz de coeficientes técnicos que corresponde a la primera restricción, obteniendo como resultado,  $\bar{3} = 3 - ((4*2) / 6) = 5/3$ , siempre dividiendo por el elemento pivote, es decir al realizar un nuevo cálculo de nuevas



posiciones se divide por el elemento pivote, la nueva posición de  $X_4$  en la matriz de coeficientes técnicos será  $\bar{0} = ((4*1) / 6) = -2/3$ .

Las posiciones de  $X_1$  y  $X_3$  que están en la base forman la matriz de identidad, por lo cual agregamos uno y cero, según la restricción a que correspondan; en la matriz de la tabla del simplex, la primera fila de la matriz de coeficientes técnicos corresponde a la primera restricción, la segunda fila a la segunda restricción y así sucesivamente dependiendo del número de restricciones que tenga el problema.

Vamos a la nueva tabla del simplex, calculamos todos los  $(z - c)$ , para ver si existen valores negativos entre estos. Así se obtiene que la variable  $X_2$  es negativa, luego esta entra a la base a ser básica; ahora buscamos cuál sale, obteniéndose que  $X_3$  es la menor positiva, luego sale de la base. El nuevo elemento pivote es  $5/3$ , una vez estimado quién sale y cuál entra de la base; calculamos la segunda iteración:

Iteración 2

	$C_j$		10	6	0	0		
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	b/a	
6	$X_2$	5.4	0	1	3/5	-2/5		
10	$X_1$	0.2	1	0	-1/5	3/10		
	Z	34.4	0	0	1.6	0.6		
			$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	$Z_3 - C_3$	$Z_4 - C_4$		

Si fuéramos a calcular el nuevo valor de  $X_4$  en la segunda restricción de la matriz de los coeficientes técnicos de la segunda iteración sería:

$\bar{1}/6 = 1/6 - ((1/3*(-2/3)) / 5/3) = -2/5$  como aparece en la nueva tabla.

Al calcular todos los  $(z - c)$ , vemos que todos son positivos, luego hemos llegado a la solución óptima del problema. Por lo cual, la solución sería la siguiente:

$$\begin{aligned} X_1^* &= 0.2 \\ X_2^* &= 5.4 \\ Z^* &= 34.4 \end{aligned}$$

Las otras variables  $X_3$  y  $X_4$  son iguales a cero; la razón, están fuera de la base de las variables básicas de la tabla del simplex y no participan de la solución, su contribución a la función objetivo es cero.

La interpretación económico-financiera de estos resultados de la solución óptima depende del tipo de problema que estemos analizando.

Sin embargo, para nuestro ejemplo; supondremos que estamos buscando maximizar las ventas de dos productos; que requieren de materia prima e insumos para su elaboración; entonces nuestro análisis e interpretación de los resultados es:

Con respecto a la función objetivo, se tiene que los precios de venta de cada producto son, \$ 10 y \$ 6 pesos.

$$\text{Máx } Z = 10X_1 + 6X_2$$

Luego los ingresos totales por ventas totales son iguales a  $\$/u \ 10*0.2 (u) + \$/u \ 6*5.4 (u) = \$34.4$

Significa ello que para lograr unos ingresos totales de \$ 34.4 pesos se deben vender 0.2 unidades del producto uno y 5.4 unidades del producto dos, de acuerdo al resultado obtenido por el método simplex; pero si estuviéramos hablando de productos como pan aliñado y pan francés; no podemos decir que se va producir 0.2 unidades de pan aliñado, aproximamos a la unidad más inmediata, por encima o por debajo tomando como referencia el punto medio, es decir, 0 unidades de pan aliñado y 5 unidades de pan francés luego nuestros ingresos son \$30.0 pesos.

Si estuviéramos hablando de unos productos, como oro galo y oro puro, entonces nuestros ingresos serán de \$34.4, ya que el oro se puede vender por onzas, y 0.2 onzas a \$ 10 cada onza, el valor de esa venta sería \$ 2.

Luego se hace el análisis del uso de los recursos, para ello se toma cada restricción tal cual se obtuvo la solución óptima y suponemos que la primera es la restricción de materia prima y la segunda es la restricción de insumos y se analiza de la siguiente forma:

**Restricción de materia prima**

$$\begin{aligned} 4X_1 + 3X_2 &\leq 17 \\ 4*0.2 + 3*5.4 &\leq 17 \\ 0.8 + 16.2 &\leq 17 \end{aligned}$$

$17 \leq 17$  en cuanto a la materia prima se usó toda la disponible

**Restricción de Insumos**

$$\begin{aligned} 6X_1 + 2X_2 &\leq 12 \\ 6*0.2 + 2*5.4 &\leq 12 \\ 1.2 + 10.8 &\leq 12 \end{aligned}$$

$12 \leq 12$  significa que se utilizaron todos los insumos disponibles.

Si por ejemplo, el resultado hubiese dado

$$10 \leq 12$$

Quiere decir que sobraron dos unidades de insumos disponibles que se pueden emplear en otra actividad.

Si se utilizara el software del WinQSB, tendríamos la siguiente tabla de resultados.

Tabla 2 Solución final WinQSB

Variable Decisión	Valores Solución	Costo Unitario o ganancia	Total Contribución	Costo reducido	Estado Básico	Mínimo Permissible de $C_j$	Máximo Permissible de $C_j$
$X_1$	0,2000	10	2	0	Básica	8	18
$X_2$	5,4000	6	32,4	0	Básica	3,333	7,5
Función	Objetivo	maximizar	34,4				
Restricción	Lado Izquierdo	Dirección	Lado Derecho	Necesidad	Precio sombra	Mínimo permissible RHS	Máximo Permissible RHS
$C_1$	17	$\leq$	17	0	1,6	8	18
$C_2$	12	$\leq$	12	0	0,6	11,33	25,5

Fuente. Elaboración Propia

Donde la primera parte serían las incidencias resultantes en la función objetivo y la segunda parte las incidencias en las restricciones.

El análisis interpretativo de la primera parte de la tabla en relación con la función objetivo, se interpretaría así:

La primera columna significa variables de decisión. En nuestro ejemplo son las variables  $X_1$  y  $X_2$ .

La segunda columna son los valores óptimos de las variables. Es decir, el óptimo de  $X_1^* = 0.2$  y  $X_2^* = 5.4$  unidades.

La tercera columna sería el costo o precio unitario de cada variable. Es nuestro precio de venta  $X_1=10$  y  $X_2=6$  pesos.

En la cuarta columna tenemos la contribución de cada variable a la optimización de la función objetivo. Contribución total de la variable  $X_1 = 10 \cdot 0.2 = 2$  pesos; contribución total de la variable  $X_2 = 6 \cdot 5.4 = 32.4$  pesos.

La quinta columna, será la de costo reducido. Para el caso de este problema, se observa que no hay reducción de costos.

La sexta columna son las variables básicas. Significa que las variables que estamos analizando son las que terminaron como básicas en la última tabla de la solución simplex.

La séptima columna, lo mínimo permissible del coeficiente de contribución de la variable en la función objetivo. Muestra en cuánto puedo disminuir el precio de venta de la variable  $X_1$ , en nuestro caso hasta 8 pesos se puede disminuir.

La octava columna, lo máximo permissible del coeficiente de contribución de la variable en la función objetivo. Indica en cuánto puedo aumentar el precio de venta de la variable  $X_1$ , en nuestro caso hasta 18 pesos se puede aumentar.

La misma interpretación se realiza para la variable  $X_2$  y como último el valor total de la función objetivo.

Por último, tenemos el valor de la función objetivo óptimo el cual es la suma de las dos contribuciones de cada variable, que es igual a 34.4.

En cuanto a las incidencias de las restricciones, tenemos lo siguiente:

La primera columna significa restricciones: restricción 1 y restricción 2

La segunda columna es el lado izquierdo. Es el rango menor que puede mover el recurso de la restricción, en nuestro caso es 17 lo mínimo que se debe tener disponible para la producción de ese recurso.

La tercera columna es  $\leq, =, \geq$ ; dirección de la restricción, es decir cómo se mueve ese recurso.

La cuarta columna lado derecho. Es el rango mayor que puede mover el recurso de la restricción, en nuestro caso es 17 lo máximo que se debe tener disponible para la producción de ese recurso.

La quinta columna es la holgura o excedente de la restricción. Significa si sobra o faltan recursos disponibles.

La sexta columna precio-sombra. Da el valor de en cuánto se podría vender una unidad adicional que se produzca con ese recurso.

La séptima columna lo mínimo permissible de la disponibilidad de recurso de la restricción. Muestra en cuánto puedo disminuir el recurso  $b_1$ , en nuestro caso hasta 8 unidades se puede disminuir.

La octava columna lo máximo permissible de la disponibilidad de recurso de la restricción significa en cuánto puedo aumentar el recurso  $b_1$ , en nuestro caso hasta 18 unidades se puede aumentar la disponibilidad de recursos.

La misma interpretación se realiza para la variable  $X_2$ .

## Método del Gran M

Este método es una solución a los casos de las restricciones mayor igual, cuando se va a optimizar la función objetivo, ya sea maximizando o minimizando.

### Caso maximizando.

Supongamos el siguiente modelo matemático de un problema determinado:

$$\begin{aligned} \text{Máx } z &= 12X_1 + 9X_2 \\ \text{C. S. R} \\ 8X_1 + 7X_2 &\leq 54 \\ 9X_1 + 5X_2 &\geq 36 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Llevamos el problema para resolverlo por el método de la tabla del simplex; así, transformamos las desigualdades en igualdades.

$$8X_1 + 7X_2 + X_3 = 54$$

Como la segunda restricción es mayor igual, tenemos:

$$9X_1 + 5X_2 - X_4 + X_5 = 36$$

Por lo cual, la función objetivo quedaría

$$\text{Máx } z = 12X_1 + 9X_2 + 0X_3 + 0X_4 - MX_5$$

Una vez convertidas las desigualdades en igualdades, se llevan las restricciones a la tabla del simplex, y se obtiene que el valor de M es muy grande, por lo cual se reescribe en la tabla así:

Iteración Inicial

	$C_j$		12	9	0	0	-M		
$C_B$	$X_B$	b	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b/a	
0	$X_3$	54	8	7	1	0	0	54/8	6.75
-M	$X_5$	36	9	5	0	-1	1	36/9	4
	Z	-36M	-12-9M	-9-M5	0	M	0		
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$		

Seleccionamos la variable que entra a ser básica y deja de ser básica; de los  $(Z_j - C_j)$ , en este caso sería  $X_1$  la más negativa; la que sale de la base es  $X_5$  que es la menor positiva por encima de cero. El elemento pivote es 9 el cruce entre la variable que entra y la variable que sale. La nueva iteración queda:

Iteración 1

	$C_j$		12	9	0	0	-M		
$C_B$	$X_B$	b	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b/a	
0	$X_3$	22	0	2.55	1	0.88	-0.88	8.62	
12	$X_1$	4	1	0.55	0	-0.11	0.11	7.27	
	Z	48	0	-2.4	0	-1.32	M+1.32		
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$		

La variable que entra es  $X_2$  y la variable que sale es  $X_1$ ; ahora hacemos la segunda iteración.

Iteración 2

	$C_j$		12	9	0	0	-M		
$C_B$	$X_B$	b	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b/a	
0	$X_3$	3.45	.463	0	1	1.4	-1.4	2.48	
9	$X_2$	7.27	1.81	1	0	-2	0.2	-36.35	
	Z	65.43	4.29	0	0	-1.8	1.8		
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$		

La variable que entra es la  $X_4$  y la que sale  $X_2$ ; ahora hacemos la siguiente iteración.

Iteración 3

	$C_j$		12	9	0	0	-M		
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b/a	
0	$X_4$	2.48	-3.30	0	0.71	1	-1		
9	$X_2$	7.76	1.14	1	1.42	0	0		
	Z	69.84	1.14	0	.142	0	0		
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$		

La solución óptima es  $X_1^* = 0$ ;  $X_2^* = 7.76$ ;  $X_3^* = 0$ ;  $X_4^* = 2.48$ ;  $X_5^* = 0$   $Z^* = 69.84$

**Caso Minimizando.**

Supongamos el siguiente modelo matemático.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2X_1 + 2X_2 + 4X_3 \\ \text{C. S. R} \\ 3X_1 + 7X_2 + 4X_3 &\leq 18 \\ 5X_1 + 2X_2 + X_3 &\geq 24 \\ 4X_1 + 3X_2 + 6X_3 &\geq 16 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Transformamos las desigualdades en igualdades.

$$\begin{aligned}
 3X_1 + 7X_2 + 4X_3 + X_4 &= 18 \\
 5X_1 + 2X_2 + X_3 - X_5 + X_6 &= 24 \\
 4X_1 + 3X_2 + 6X_3 - X_7 + X_8 &= 16
 \end{aligned}$$

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 0X_4 + 0X_5 + M X_6 + 0X_7 + M X_8$$

Iteración Inicial

	$C_j$		2	2	4	0	0	M	0	M	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	b/a
0	$X_4$	18	3	7	4	1	0	0	0	0	6
M	$X_6$	24	5	2	1	0	-1	1	0	0	4.8
M	$X_8$	16	4	3	6	0	0	0	-1	1	4
	Z	40M	9M-2	5M-2	7M-4	0	-M	0	-M	0	
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$	$Z_6-C_6$	$Z_7-C_7$	$Z_8-C_8$	

Cuando estamos minimizando entra la variable más positiva, en este caso  $X_1$  y sale la variable menor positiva por encima de cero de los b/a en este caso  $X_6$ ; el elemento pivote es el cruce de las dos variables la que entra y la que sale que es 4. La nueva iteración es:

Iteración 2

	$C_j$		2	2	4	0	0	M	0	M	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	b/a
0	$X_4$	6	0	4.75	-5	1	0	-0	.75	-.75	8
M	$X_6$	4	0	-1.75	-6.5	0	-1	1	1.25	-1.25	3.2
2	$X_1$	4	1	.75	1.5	0	0	0	-.25	.25	-16
	Z	4M+8	0	-1.75M-.5	-6.5M-1	0	-M	0	1.25M-.5	-1.25M+.5	
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$	$Z_6-C_6$	$Z_7-C_7$	$Z_8-C_8$	

La variable que entra es la  $X_7$  y la que sale es  $X_6$ ; la nueva iteración es:

Iteración 3

	$C_j$		2	2	4	0	0	M	0	M	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	b/a
0	$X_4$	3.6	0	5.8	3.4	1	.6	-0.6	0	0	
0	$X_7$	3.2	0	-1.4	-5.2	0	-.8	0.8	1	-1	
2	$X_1$	4.8	1	.4	.2	0	-.2	.2	0	0	
	Z	9.6	0	-1.2	-3.6	0	-.4	-M+.2	0	-M	
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$	$Z_6-C_6$	$Z_7-C_7$	$Z_8-C_8$	

La solución óptima es igual a  $X_1^* = 4.8, X_2^* = 0, X_3^* = 0, X_4^* = 3.6, X_5^* = 0, X_6^* = 0, X_7^* = 3.2, Z^* = 9.6$

Si estuviéramos analizando un problema en especial, la respuesta se analizaría de acuerdo con lo planteado en él.

Al resolver el problema en WinQSB, los resultados serían iguales; sin embargo, la interpretación tendría que hacerse de acuerdo con la tabla que el software arroja.

Tabla 3 Solución final Win QSB

Variable Decisión	Valores Solución	Costo Unitario o ganancia	Total Contribución	Costo reducido	Estado Básico	Mínimo Permisible de $C_j$	Máximo Permisible de $C_j$
$X_1$	4,8	2	9,6	0	B	0	5
$X_2$	0	2	0	1,2	NB	0,8	M
$X_3$	0	4	0	3,6	NB	0,4	M
Función	Objetivo	maximizar	9,6				
Restricción	Lado Izquierdo	Dirección	Lado Derecho	Necesidad	Precio sombra	Mínimo permisible RHS	Máximo Permisible RHS
$C_1$	14,4	$\leq$	18	3,6	0	14,4	M
$C_2$	24	$\geq$	24	0	0,4	20,0	30
$C_3$	19,2	$\geq$	16	3,2	0	-M	19,2

Fuente. Elaboración Propia

Donde la solución óptima es  $Z^* = 9.6 x_1^* = 4.8 x_2^* = 0 x_3^* = 0 x_4^* = 3.6 x_5 = 0 x_6 = 0 x_7 = 3.2$

## Problemas

### Problema 1

Un alumno quiere maximizar su placer diario. Tiene un rango de actividades agradables que puede hacer, pero tiene solamente 24 horas para hacerlas; las actividades son las siguientes:

Actividad	Placer (en unidades de placer)
1. Tomar una cerveza	4 UP
2. Fumar un cigarrillo	3 UP
3. Jugar un partido de fútbol	7 UP
4. Participar en una discusión	2 UP
5. Dar un paseo	3 UP
6. Leer una revista	2 UP
7. Dormir	4 UP

Pero resulta que hay algunas restricciones, también. Hay solamente 24 horas en el día, y cada actividad requiere un cierto tiempo. Por ejemplo, la primera actividad requiere 15 minutos, la segunda diez minutos, la tercera dos horas, la cuarta una hora, la quinta una hora, la sexta media hora y la séptima una hora.

Además, el alumno sabe que no puede tomar más de cinco cervezas diarias por cuestión de dinero. Tampoco puede fumar más de 40 cigarrillos diarios por razones de salud. Jugar más de dos partidos de fútbol diarios, por cansancio. Participar en más de tres discusiones, por aburrimiento. Dar más de dos paseos. Ni leer más de cuatro revistas por cansancio de los ojos. En cuanto a las horas de sueño, el alumno sabe que no puede dormir más de diez horas, pero que tiene que dormir al menos siete.

¿Cuáles deben ser las actividades diarias del alumno, para maximizar su placer?

### Problema 2

Un taller tiene tres tipos de máquinas, A, B, y C, puede fabricar cuatro productos, 1, 2, 3, 4. Todos los productos tienen que ir a cada máquina, y cada uno va en el mismo orden: primero a la máquina A, luego a la B, luego a la C. La siguiente tabla muestra:

- Las horas requeridas por cada máquina por unidad de cada producto.
- Las horas totales disponibles para cada máquina por semana.
- La ganancia por unidad vendida de cada producto.

Tabla 3 Información básica

Tipo de máquina	Producto				Horas disponibles por semana
	1	2	3	4	
A	1,5	1	2,4	1	2000
B	1	5	1	3,5	8000
C	1,5	3	3,5	1	5000
Ganancia Unitaria	\$ 5,24	\$ 7,30	\$ 8,30	\$ 4,18	

El gerente del taller busca maximizar la ganancia. Supongamos que  $x_j$  es el número de unidades del producto  $j$  producidas cada semana, luego, queremos hallar  $x_j$  ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) para maximizar la ganancia total.

Considérese una compañía que debe elaborar dos productos en un determinado periodo (un trimestre). La compañía puede pagar por materiales y mano de obra con dinero obtenido dos fuentes: fondos propios y préstamos. La compañía enfrenta tres decisiones:

- ¿Cuántas unidades debe producir del producto 1?
- ¿Cuántas unidades debe producir del producto 2?
- ¿Cuánto dinero debe obtener prestado para apoyar la producción de los dos productos?

Al tomar estas decisiones, debe maximizar la ganancia sujeta a las condiciones indicadas a continuación:

- Los productos disfrutan de un “mercado de ventas”, por lo tanto la empresa puede vender tantas unidades como pueda producir. Además, la cantidad producida no tiene efecto en los precios del mercado, ya que el volumen de producción de la compañía es pequeño con relación al volumen del mercado total. Por lo tanto, a la empresa le gustaría producir tantas unidades como fuera posible dentro de las restricciones financieras y de capacidad de su fábrica. Estas restricciones junto con los datos de costos y precios se dan en la tabla que aparece a continuación.
- Los fondos propios de la compañía durante el periodo son de \$30.000.
- Un banco prestará hasta \$ 20.000 por trimestre a una tasa de interés del 5% por trimestre, si la razón financiera conocida como la prueba de ácido de la compañía permanece en una proporción 3 a 1, como mínimo mientras exista el adeudo. Recuerde que la prueba de ácido está dada por la razón de efectivo más cuentas por cobrar dividido en las cuentas por pagar.
- Como se observará, los pago de mano de obra y materia prima se hacen al final del periodo de producción; por lo tanto, el crédito necesario se obtiene en ese momento. Los envíos de los productos fabricados se hacen a

crédito, al final del periodo de producción. Finalmente, el ingreso por ventas se recibe y las cuentas por pagar se cancelan al final del siguiente periodo.

Tabla de capacidad, precios y costos

Producto	Precio de ventas (\$/U)	Costos de producción (\$/U)	Horas para producir una unidad en el departamento		
			A	B	C
1	14	10	.5	.3	.2
2	11	8	.3	.4	.1
Horas disponibles por trimestre			500	400	200

## Modelo determinístico DUAL

Uno de los descubrimientos más importantes durante el desarrollo de la programación lineal fue el concepto de la “dualidad”, y sus ramificaciones. El descubrimiento indicó que cada problema de los modelos lineales tiene otro relacionado, llamado “dual”. Hay varias relaciones importantísimas entre los dos problemas, las cuales facilitan el trabajo de análisis entre los siguientes tres campos principales:

Tecnología de la informática.

Análisis económico.

Análisis postóptimo.

### Tecnología de la informática

Actualmente en la tecnología de la informática, se utiliza el Método Dual, el cual reduce el tamaño de la base básica que emplea el Método Simplex.

La problemática consiste en el tamaño de la base, ya que esto determina el espacio que ocupa de la memoria de la computadora y lo puede volver más lento. En este caso, el tiempo para resolver un problema depende más del número de restricciones que del número de variables.

Además, veremos que algunas veces se puede evitar el uso de las variables artificiales, mediante el uso del problema Dual, y su método de solución, el Método Dual Simplex.

Supongamos el siguiente problema lineal:

Problema PRIMO

$$\text{Max } Z = \bar{C} * \bar{X}$$

c.s.r.

$$\bar{A} * \bar{X} \leq b$$

$$\bar{X} \geq 0$$

Existe otro problema, el Dual, que se expresa así:

Problema Dual

$$\text{Min } Z = \bar{b} * \bar{y}$$

c.s.r.

$$\bar{A} * \bar{y} \leq C$$

$$\bar{Y} \geq 0$$

Por lo tanto, los coeficientes en la j-ésima restricción del Dual son los coeficientes de  $x_j$  en las restricciones del primero y viceversa, además, el lado derecho de la j-ésima restricción del Dual es el coeficiente de  $x_j$  en la función objetivo del primero y viceversa. Por lo tanto, hay una variable dual para cada restricción del PRIMO, y una restricción dual para cada variable del PRIMO.

Ilustramos lo anterior con los siguientes ejemplos:

### Ejemplo 1

Problema primo

$$\text{Máx. } z_x = 4x_1 + 3x_2$$

CSR

$$X_1 \leq 6$$

$$X_2 \leq 8$$

$$X_1 + X_2 \leq 7$$

$$3X_1 + X_2 \leq 15$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Problema Dual

$$\text{Min } Z_y = 6y_1 + 8y_2 + 7y_3 + 15y_4$$

C.S.R.

$$1y_1 + 0y_2 + y_3 + 3y_4 \geq 4$$

$$0y_1 + 1y_2 + y_3 + 1y_4 \geq 3$$

$$y_i \geq 0$$

Esta base asume que se multiplican las restricciones por (-1) para tener signos  $\leq$ . Luego, se suman variables de holgura. Esto implica que los de las variables básicas (las de holgura) son negativas, no obstante, el Método Dual Simplex puede trabajar con valores negativos.

### Análisis Económico

El concepto de dualidad tiene una interpretación económica natural que los economistas consideran muy útil. Recuérdese que los problemas de programación lineal tienen que ver con la asignación de recursos limitados entre actividades competitivas. Interpretación típica del problema PRIMO; donde  $x_j$  es el nivel de la actividad  $j$ ,  $c_j$  es la ganancia unitaria de la actividad o el precio de venta unitario o el costo unitario de la actividad  $j$ ;  $b_i$  es la cantidad de recurso  $i$  disponible, y  $a_{ij}$  es la cantidad de recurso  $i$  usada para cada unidad de actividad  $j$ . Supóngase que la ganancia se mide en pesos. Luego, considere una restricción típica del problema dual correspondiente:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \leq c_j$$

Nótese que, del problema PRIMO, las unidades de  $c_j$  son pesos por unidad de actividad  $j$ , y las unidades de  $a_{ij}$  son unidades del recurso  $i$  por unidad de actividad  $j$ . Por lo tanto,  $y_i$  debe tener las unidades de pesos por unidad de recurso  $i$ . En otras palabras,  $y_i$  puede interpretarse como el precio unitario o precio relativo, o precio sombra del recurso  $i$ , en el sentido de un precio implícito del recurso al usuario. Ese precio relativo es por cada unidad adicional que se produzca ante posibles demandas de los consumidores.

La siguiente expresión,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j$$

Nos indicaría el costo implícito de operar la actividad  $j$  al nivel unitario.

Función objetivo Dual:

$$\text{Min } Z_y = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Se interpreta como que los precios implícitos de los recursos deben fijarse para minimizar sus costos totales al usuario. El valor óptimo de las variables duales,  $y_i^*$  ( $i = 1, \dots, m$ ), representan el valor implícito verdadero por unidad del recurso respectivo.

El teorema Dual,  $z_x = z_y$ , dice que el costo total (valor implícito) de los recursos es igual a la ganancia total de las actividades, consumiendo los recursos de una manera óptima.

Se deben tener presente las relaciones existentes entre las variables del PRIMO y Dual. Estas indican que el valor implícito del recurso  $i$  es cero ( $y_i^* = 0$ ) siempre y cuando el suministro de ese recurso no sea agotado por las actividades, o sea el caso que  $x_{n+1} > 0$ . En la terminología económica, tal recurso es un bien libre; el precio de un bien para el cual hay un suministro sobrante; tiene que ser cero por la ley de la oferta y la demanda. Es importante resaltar que el valor implícito de los recursos para una unidad de la actividad  $j$  es igual a la ganancia unitaria.

$$y_{m+1}^* = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* = c_j$$

Siempre que esa cantidad se ejecute a un nivel positivo es decir ( $x_j > 0$ ) se tiene lo siguiente.

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* = c_j \rightarrow y_{m+1}^* \neq 0 \rightarrow x_j = 0$$

### Teorema

El dual del dual es el primo, implica una relación complementaria simétrica entre el primo y el dual. De hecho, no importa cuál problema es llamado Primo y cuál dual, y viceversa.

### Teorema

Asuma que tanto el primo como el dual tienen soluciones factibles finitas, entonces existe una solución finita óptima para ambos problemas.

$$Z_x^* = Z_y^*$$

### Construcción del Dual

La construcción del dual se hace mediante los siguientes pasos.

1. Cada restricción del primo corresponde a una variable del dual.
2. Los recursos disponibles del primo son los coeficientes de contribución en el dual.
3. Si la función objetivo del primo se maximiza en la función objetivo del dual se minimiza.
4. Si se maximiza el primo las desigualdades deben ser  $\leq$  y el de minimización del dual es  $\geq$  y viceversa.
5. Si hay una restricción en el primo  $\geq$  se multiplica por (-1) y se transforma en una  $\leq$ .
6. Las variables en ambos problemas son no negativas es decir  $x_j \geq 0$ ;  $y_i \geq 0$

Ejemplo

PRIMO Maximizar  $Z_x = 5x_1 + 3x_2$   
 C.S.R.  
 $2x_1 + 4x_2 \leq 55$   
 $x_1 + 5x_2 \leq 62$   
 $3x_1 + 2x_2 \leq 30$   
 $x_1, x_2 \geq 0$

Dual

Minimizar  $Z_y = 55y_1 + 62y_2 + 30y_3$   
 c.s.R.  
 $2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 5$   
 $4y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 3$   
 $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

**Método dual simplex**

Este método se usa para cuando se desea maximizar la función objetivo. A través de este, los  $(Z_j - C_j)$  tienen que ser positivos, lo cual indica que la solución es óptima.

Al aplicar el método del dual simplex se deben seguir las siguientes reglas:

Regla 1 variable que sale de la base:

$$y_B = \min y_B \text{ para } x_B \leq 0$$

Regla 2 variable que entra a la base:

$$\frac{Z_j - C_j}{a_{ij}} = \text{Máx} \frac{Z_j - C_j}{a_{ij}} \text{ entra el mas negativo}$$

**Ejemplo**

Se tiene el siguiente dual

MIN  $Z_y = 4y_1 + 2y_2 + 12y_3$   
 c.s.r.  
 $y_1 + 4y_3 \geq 4$   
 $2y_2 + 3y_3 \geq 5$   
 $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Ahora planteamos el método dual simplex

MAX  $Z_y = -4y_1 - 2y_2 - 12y_3 + 0y_4 + 0y_5$   
 c.s.r.  
 $-y_1 - 4y_3 + y_4 \leq -4$   
 $-2y_2 - 3y_3 + y_5 \leq -5$   
 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$

Resolvemos por el método de la tabla del simplex

Iteración inicial

	$C_j$		-4	-2	-12	0	0	
$C_B$	$y_B$	B	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	b/a
0	$y_4$	-4	-1	0	-4	1	0	
0	$y_5$	-5	0	-2	-3	0	1	
	Z	0	4	2	12	0	0	
	$(z-c) / a$		4/0	2/-2	12/-3	0/0	0/1	
			$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	$Z_3 - C_3$	$Z_4 - C_4$	$Z_5 - C_5$	

Variable que sale de la base

Min  $(-4; -5) = -5$  sale  $y_5$

Variable que entra Máx  $(2/-2; 12/-3)$  entra  $y_2$

Iteración 1

	$C_j$		-4	-2	-12	0	0	
$C_B$	$y_B$	B	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	b/a
0	$y_4$	-4	-1	0	-4	1	0	
-2	$y_2$	5/2	0	1	3/2	0	-1/2	
	Z	-5	4	2	12	0	0	
	$(z-c) / a$		4/-1	0/0	12/-4	0/1	0/0	
			$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	$Z_3 - C_3$	$Z_4 - C_4$	$Z_5 - C_5$	



Variable que sale de la base

Min (-4; 5/2) = -4 sale  $y_4$

Variable que entra Máx (4/-1; 12/-4) entra  $y_3$ , al presentarse empate se selecciona una cualquiera arbitrariamente.

Iteración 2

	$C_j$		-4	-2	-12	0	0	
$C_B$	$y_B$	B	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	b/a
-12	$y_3$	1	1/4	0	1	-1/4	0	
-2	$y_2$	1	-3/8	1	0	5/8	-1/2	
	Z	-14	1.75	0	0	1.75	1	

La solución óptima del problema dual  $y_2^* = 1; y_3^* = 1; y_1^* = 0; y_4^* = 0; y_5^* = 0$

$z^* = -14$

Solución del problema original  $x_1^* = 1.75; x_2^* = 1; x_3^* = 1.75; x_4^* = 0; x_5^* = 0; z^* = 14$

**Caso especial**

Una igualdad en el Primo genera una variable no restringida en signo en el dual; una variable no restringida en signo en el primo genera una igualdad en el dual.

**Ejemplo.**

Se tiene el siguiente Primo

$$\begin{aligned} \text{Max } z_x &= x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ \text{c.s.r.} \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 7 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 10 \\ x_1, x_2, x_4 &\geq 0 \text{ y } x_3 \text{ no restringida en signo} \end{aligned}$$

Primero es necesario acomodar las variables para que el sistema quede con las igualdades en el mismo sentido.

$$\begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq -7 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 10 \end{aligned}$$

El dual será

$$\begin{aligned} \text{Min } z_y &= -7y_1 + 6y_2 + 10y_3 \\ \text{c.s.r.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3y_1 + 5y_2 + y_3 &\geq 1 \\ -2y_1 - 8y_2 - y_3 &\geq 6 \\ y_1 - y_3 &= -2 \\ 2x_2 - y_3 &\geq 0 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \text{ y } y_3 \text{ no restringida en signo} \end{aligned}$$

Este método se utiliza cuando la función objetivo es maximización y son negativos los elementos que la conforman.

**Problemas**

$$\begin{aligned} \text{Min } z_x &= 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{c.s.r.} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 4 \\ -x_2 - 4x_3 &\leq -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } z_x &= 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \\ \text{c.s.r.} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leq 100 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } z_x &= 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ \text{c.s.r.} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 40 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 1 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 &\leq 100 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } z_x &= x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \text{c.s.r.} \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\geq 18 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 &\leq 36 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 &\leq 24 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Análisis Postóptimo**

El análisis postóptimo es un método muy importante para obtener la solución óptima, ante la incertidumbre de los parámetros de las variables, para ello es necesario realizar una sensibilización de estos con el fin de saber cuáles son susceptibles a cambios.

**Los cambios simplex del análisis postóptimo**

Los siguientes son los cambios que se pueden realizar en el análisis postóptimo:

1. Cambio en  $c_j$  cuando  $x_j^*$  es no-básica.
2. Cambio en  $c_j$  cuando  $x_j^*$  es básica.
3. Cambio en un  $b_i$ .
4. Cambio en un  $a_{ij}$  cuando  $x_j^*$  es no-básica.
5. Cambio en un  $a_{ij}$  cuando  $x_j^*$  es básica.
6. Adición de una nueva restricción.
7. Adición de una nueva variable.

En el siguiente ejemplo se muestra la solución de cada uno de los cambios.

**Ejemplo**

Una empresa manufacturera tiene dos tipos de máquinas: máquina A y máquina B, con estas se puede fabricar tres productos 1, 2, 3; todos los productos tienen que pasar por cada máquina.

La siguiente tabla contiene los tiempos necesarios requeridos por cada producto y la disponibilidad en cada máquina, así como la utilidad obtenida por producto.

Tabla 6 Tiempos y ganancias obtenidas por producto

Máquina	Productos			Horas disponibles/ Semana
	1	2	3	
Máquina A	6	3	5	25
Máquina B	3	4	4	20
Ganancia unitaria	3	1	4	

Fuente: Elaboración Propia

¿Cuántas unidades del producto 1, 2 y 3 se deben fabricar en esas condiciones para obtener la ganancia máxima?

Formulación del modelo

- Primer paso: definir la variable de decisión

$$x_j \text{ para todo } j=1,2,3$$

$x_1$  = cantidad de unidades a producir del producto 1 por hora (u/h)

$x_2$  = cantidad de unidades a producir del producto 2 por hora (u/h)

$x_3$  = cantidad de unidades a producir del producto 3 por hora (u/h)

- Segundo paso: definir la función objetivo

$$\text{Máx } U = 2\$/u x_1 u/h + 1\$/u x_2 u/h + 4\$/u x_3 u/h$$

- Tercer paso: definir las restricciones

$$\begin{aligned} \text{Máquina A } & 6h/u x_1 u + 5h/u x_2 u + 5h/u x_3 u \leq 25 \text{ h} \\ \text{Máquina B } & 3h/u x_1 u + 4h/u x_2 u + 4h/u x_3 u \leq 20 \text{ h} \end{aligned}$$

- Cuarto paso: la condición de no negatividad

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Modelo Matemático

$$\begin{aligned} \text{Max } U &= 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{c.s.r.} & \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución

Problema Primo	Problema Dual
$\begin{aligned} \text{Max } U &= 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{c.s.r.} & \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Min } U_y &= 25y_1 + 20y_2 \\ \text{c.s.r.} & \\ 6y_1 + 3y_2 &\geq 2 \\ 5y_1 + 4y_2 &\geq 1 \\ 5y_1 + 4y_2 &\geq 4 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$
Problema Primo	Problema Dual
$\begin{aligned} \text{Max } U &= 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{c.s.r.} & \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_5 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{MAX } U_y &= -25y_1 - 20y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 \\ \text{c.s.r.} & \\ -6y_1 - 3y_2 + y_3 &= -3 \\ -3y_1 - 4y_2 + y_4 &= -1 \\ -5y_1 - 4y_2 + y_5 &= -4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0 \end{aligned}$

Solución Método Simplex del Primo

Iteración inicial

	$C_j$		3	1	4	0	0	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b/a
0	$X_4$	25	6	3	5	1	0	25/5
0	$X_5$	20	3	4	4	0	1	20/4
	Z	0	-3	-1	-4	0	0	
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$	

Hay empate en la variable que sale, por lo cual se escoge arbitrariamente cualquiera de las dos.

Sale  $X_4$  y entra la variable  $X_3$  elemento pivote 5.

Iteración 1 y final

	$C_j$		3	1	4	0	0	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b/a
4	$X_3$	5	6/5	3/5	1	1/5	0	
0	$X_5$	0	-9/5	0	0	-4/5	1	
	Z	20	9/5	7/5	0	4/5	0	
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$	

La solución óptima del primo es:

$$U_x^* = 20; x_1^* = 0; x_2^* = 0; x_3^* = 5; x_4^* = 0; x_5^* = 0$$

Solución del dual simplex

Iteración inicial

	$C_j$		-25	-20	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	B	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	b/a
0	$y_3$	-3	-6	-3	1	0	0	
0	$y_4$	-1	-3	-4	0	1	0	
0	$y_5$	-4	-5	-4	0	0	1	→
	$U_y$	0	-25	-20	0	0	0	
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$	
			-5↑	-5	0	0	0	

Variable que sale  $y_5$  variable que entra.

Iteración 1 y final

	$C_j$		-25	-20	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	B	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	b/a
0	$y_3$	9/5	0	9/5	1	0	-6/5	
0	$y_4$	7/5	0	-8/5	0	1	-3/5	
-25	$y_1$	4/5	2	4/5	0	0	-1/5	
	$U_y$	-20	0	0	0	0	5	
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$	
			$X_4$	$X_5$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	

Solución óptima del dual

$$U_y^* = -20; y_1^* = 4/5; y_2^* = 0; y_3^* = 9/5; y_4^* = 7/5; y_5^* = 0$$

De la tabla final del simplex del dual se saca la solución del primo; donde las variables de holgura del dual son las variables básicas del primo y las básicas del dual son las de holgura del primo, como se indica en la tabla final. De igual forma, se puede hacer con la tabla final de la solución óptima del Primo.

1. Cambio en  $c_j$  cuando  $x_j^*$  es no-básica.

La empresa decide aumentar el precio de venta del producto 2 de \$ 1 a \$ 2.

Cambio a la función objetivo:

$$\text{MÁX } Z = 3X_1 + X_2 + 4X_3 \rightarrow \text{MÁX } Z = 3X_1 + \underline{2X_2} + 4X_3$$

Efecto de cambio:

$$(Z_j - C_j) \rightarrow (Z_j - C_j'')$$

La solución segura, sigue siendo óptima si...  $(Z_j - C_j'') \geq 0$

Si  $(Z_j - C_j'') \geq 0$ , entonces "X<sub>j</sub>" entra a la base y se continúa resolviendo el problema.

$$X_j = X_2 \rightarrow \text{No Básica}$$

Utilizamos la fórmula:

$$\begin{aligned} (Z_j - C_j'') &= (Z_j - C_j') - (C_j'' - C_j) \\ (Z_2 - C_2'') &= (Z_2 - C_2) - (C_2'' - C_2) \end{aligned}$$

Según la tabla de solución óptima del Primo:

Cuando  $C_2=1$ , entonces  $Z_2 - C_2 = 7/5$  en la solución óptima.

Ahora se realiza el cambio  $(Z_2 - C_2'') = 7/5 - (2-1) = 2/5$  que es  $2/5 \geq 0$ ; luego sigue siendo óptima la solución.

¿Qué pasa en el dual?

Cambio en  $C_j \rightarrow$  Cambio en la J-ésima restricción

$C_2'' \rightarrow$  Restricción 2

$$3Y_1 + 4Y_2 \geq 1 \rightarrow 3Y_1 + 4Y_2 \geq 2$$

Como no cambian  $y_1^* = 4/5$  a  $y_2^* = 0$

$$3(4/5) + 4(0) \geq 2$$

$2/5 \geq 2$  la solución seguirá siendo óptima.

### 2. Cambio en $c_j$ cuando $x_j^*$ es básica

Por políticas de mercado se incrementa el precio de venta del producto 3, para obtener una ganancia unitaria de \$ 6.

Cambio en la función objetivo:

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + X_2 + \underline{4X_3} \rightarrow \text{Máx } Z = 3X_1 + X_2 + \underline{6X_3}$$

La variable  $X_3$ : Básica  $\rightarrow (Z_j - C_j') = 0$

$$Z_2 - C_2'' = 0$$

La solución segura siendo óptima si...  $(Z_j - C_j') > 0$

Cambia la fila  $(Z_j - C_j')$  en la última tabla.

La tabla final cambia

Iteración 1y final

	$C_j$		3	1	6	0	0	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b/a
6	$X_3$	5	6/5	3/5	1	1/5	0	
0	$X_5$	0	-9/5	0	0	-4/5	1	
	$U_x$	30	21/5	13/5	0	6/5	0	
			$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	$Z_3 - C_3$	$Z_4 - C_4$	$Z_5 - C_5$	

$$y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_1 \quad y_2$$

La nueva solución óptima queda.

$$U_x^* = 30; x_1^* = 0; x_2^* = 0; x_3^* = 5; x_4^* = 0; x_5^* = 0$$

Aumenta el valor de la función objetivo.

¿Qué le pasa al dual?

$$U_y^* = -30; y_1^* = 6/5; y_2^* = 0; y_3^* = 21/5; y_4^* = 13/5; y_5^* = 0$$

La nueva solución del dual cambia en cuanto al valor de sus variables, como  $y_1 = 6/5$  que antes era  $4/5$  aunque el valor de la función objetivo sigue siendo de \$ 30 de ganancia.

$$C_3'' \rightarrow 5Y_1 + 4Y_2 \geq 6 \rightarrow 5(6/5) + 4(0) \geq 6 \rightarrow 6 \geq 6$$

En el dual sigue siendo óptima.

### 3. Cambio en la disponibilidad de un recurso

La empresa adquirió una nueva máquina, por los que aumenta la disponibilidad de horas por semana, de 25 a 40 Horas.

Se cambia la restricción 1:

$$6X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq \underline{25} \rightarrow 6X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq \underline{40}$$

Para evaluar el impacto en la solución óptima se resuelve:

$$b' = b'' + X_{n+i} (b_i'' - b_1)$$

$$b \quad b \text{ última} \quad b \text{ nuevo} \quad b \text{ primera tabla}$$

estimado

Valor de la variable en la fila del cambio  
n: N° Máx. De restricciones i: subíndice de la restric. Del bi cambiado

Aplicando la fórmula:

$$5' = 5 + 1/5(40 - 25) = 8 \text{ (X3)}$$

$$20' = 20 + 4/5(40 - 25) = 32 \text{ (Zj-Cj)}$$

La última tabla cambia

Iteración 1y final

	C <sub>j</sub>		3	1	4	0	0	
C <sub>B</sub>	X <sub>B</sub>	B	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	b/a
4	X <sub>3</sub>	8	6/5	3/5	1	1/5	0	
0	X <sub>5</sub>	0	-9/5	0	0	-4/5	1	
	U <sub>x</sub>	32	9/5	7/5	0	4/5	0	
			Z <sub>1</sub> -C <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub> -C <sub>2</sub>	Z <sub>3</sub> -C <sub>3</sub>	Z <sub>4</sub> -C <sub>4</sub>	Z <sub>5</sub> -C <sub>5</sub>	

**Nueva solución.** Cambia el valor total de la función a \$32 y la cantidad de unidades del producto 3 será de 8 unidades

$$U'_x = 32; x'_1 = 0; x'_2 = 0; x'_3 = 8; x'_4 = 0; x'_5 = 0$$

¿Qué le pasa al dual?

Cambia la función objetivo:

$$\text{Mín } Zy = 25y_1 + 20y_2 \rightarrow \text{Mín } Zy = 40y_1 + 20y_2$$

Los nuevos valores óptimos:

$$Z'_y = 32 \quad y_1 = 4/5 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 9/5 \quad y_4 = 7/5 \quad y_5 = 0$$

y<sub>1</sub>, y<sub>2</sub>, y<sub>3</sub>, y<sub>4</sub>, y<sub>5</sub> conservan sus valores originales.

La solución es factible, no hubo cambios en la restricción.

La solución es óptima porque las variables básicas son  $\geq 0$

#### 4. Cambio en un a<sub>ij</sub> cuando x<sub>j</sub>\* es no-básica.

En la empresa se desea optimizar la fabricación del producto 1, disminuyendo las horas disponibles por semana para el proceso de máquina 1 de 6 horas a 4 horas.

Cambia la restricción 1:

$$6X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 25 \rightarrow 4X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 40$$

Si x<sub>1</sub> es no básica;

De la tabla de solución a<sub>11</sub> = 6/5 (Z<sub>1</sub>\*-C<sub>1</sub>) = 9/5

$$X_1^* = 0 \quad X_2^* = 0 \quad X_3^* = 5$$

Evaluación de la nueva restricción: 4X<sub>1</sub> + 3X<sub>2</sub> + 5X<sub>3</sub> ≤ 25

$$4(0) + 3(0) + 5(5) \leq 25$$

25 ≤ 25 donde se cumple la desigualdad.

Aplicando la fórmula:

$$6/5' = 6/5 + 1/5*(4-6) = 4/5$$

$$9/5' = 9/5 + 4/5*(4-6) = 1/5$$

Iteración 1y final

	C <sub>j</sub>		3	1	4	0	0	
C <sub>B</sub>	X <sub>B</sub>	B	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	b/a
4	X <sub>3</sub>	5	4/5	3/5	1	1/5	0	
0	X <sub>5</sub>	0	-9/5	0	0	-4/5	1	
	U <sub>x</sub>	20	1/5	7/5	0	4/5	0	
			Z <sub>1</sub> -C <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub> -C <sub>2</sub>	Z <sub>3</sub> -C <sub>3</sub>	Z <sub>4</sub> -C <sub>4</sub>	Z <sub>5</sub> -C <sub>5</sub>	
			y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	

La solución del Primo no cambia

¿Qué le pasa al dual?

Cambia restricción 1 del dual:

$$6y_1 + 3y_2 \geq -3 \rightarrow 4y_1 + 3y_2 \geq 3$$

$$4(4/5) + 3(0) \geq 3$$

16/5 ≥ 3 al ser mayor la solución sigue siendo óptima

La solución también es óptima y su función objetivo no cambia.

#### 5. Cambio en un a<sub>ij</sub> cuando x<sub>j</sub>\* es básica.

Se diseña una innovación para el producto 3, aumentar las horas requeridas de la máquina A de 5 a 7 horas.

Cambiar la restricción 1

$$6X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 25 \rightarrow 6X_1 + 3X_2 + 7X_3 \leq 25$$

$$\text{Tenemos } (a_{13}'' - a_{13}) = 7 - 5 = 2$$

De la tabla final se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$(0) \quad Z + 9/5x_1 + 7/5x_2 + 4/5x_4 = 20$$

$$(1) \quad 6/5x_1 + 3/5x_2 + x_3 + 1/5x_4 = 5$$

$$(2) \quad 9/5x_1 + -4/5x_4 + x_5 = 0$$

El coeficiente  $x_4$  indica el número de veces que ocurre el cambio en cada fila, siendo el cambio  $[7-5] = 2$ .

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z + 9/5x_1 + 7/5x_2 + [0 + 4/5[7-5]]x_3 + 4/5x_4 = 20 \\ (1) \quad & 6/5x_1 + 3/5x_2 + [1 + 1/5[7-5]]x_3 + 1/5x_4 = 5 \\ (2) \quad & -9/5x_1 + [0 + 0[7-5]]x_3 - 4/5x_4 + x_5 = 0 \end{aligned}$$

Simplificando, tenemos

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z + 9/5x_1 + 7/5x_2 + 8/5x_3 + 4/5x_4 = 20 \\ (1) \quad & 6/5x_1 + 3/5x_2 + 7/5x_3 + 1/5x_4 = 5 \\ (2) \quad & -9/5x_1 + -4/5x_4 + x_5 = 0 \end{aligned}$$

Ahora eliminamos  $8/5x_3$  de la función objetivo y  $7/5x_3$  debe tener el coeficiente de 1; luego dividimos la fila por  $7/5$  de la fila 1

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z + 9/5x_1 + 7/5x_2 + 8/5x_3 + 4/5x_4 = 20 \\ (1) \quad & 6/7x_1 + 3/7x_2 + x_3 + 1/7x_4 = 25/7 \\ (2) \quad & -9/5x_1 + -4/5x_4 + x_5 = 0 \end{aligned}$$

Multiplicamos la fila 1 por  $(-8/5)$

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z + 9/5x_1 + 7/5x_2 + 8/5x_3 + 4/5x_4 = 20 \\ (1) \quad & -48/35x_1 - 24/35x_2 - 8/5x_3 - 8/35x_4 = 40/7 \\ (2) \quad & -9/5x_1 + -4/5x_4 + x_5 = 0 \end{aligned}$$

Restamos las filas 0 y 1

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z + 9/5x_1 + 7/5x_2 + 8/5x_3 + 4/5x_4 = 20 \\ (1) \quad & -48/35x_1 - 24/35x_2 - 8/5x_3 - 8/35x_4 = 40/7 \end{aligned}$$

---


$$(0) \quad Z + 3/7x_1 + 5/7x_2 + 4/7x_4 = 100/7$$

Nuevas ecuaciones

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z + 3/7x_1 + 5/7x_2 + 4/7x_4 = 100/7 \\ (1) \quad & 6/7x_1 + 3/7x_2 + x_3 + 1/7x_4 = 25/7 \\ (2) \quad & -9/5x_1 + -4/5x_4 + x_5 = 0 \end{aligned}$$

Nueva solución

Iteración final con los cambios

	$C_j$		3	1	4	0	0	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b/a
4	$X_3$	25/7	6/7	3/7	1	1/7	0	
0	$X_5$	0	-9/5	0	0	-4/5	1	
	$U_x$	100/7	3/7	5/7	0	4/7	0	
			$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	$Z_3 - C_3$	$Z_4 - C_4$	$Z_5 - C_5$	

La nueva solución óptima:

$$U_x^* = 100/7; x_1^* = 0; x_2^* = 0; x_3^* = 25/7; x_4^* = 0; x_5^* = 0$$

La solución óptima del dual:

$$U_y^* = 100/7; y_1^* = 4/7; y_2^* = 0; y_3^* = 3/7; y_4^* = 5/7; y_5^* = 0$$

Para comprobar, se toma la restricción 1 y se reemplaza la solución:

$$\rightarrow 6X_1 + 3X_2 + 7X_3 \leq 25$$

$$6^*(0) + 3^*(0) + 7^*(25/7) \leq 25$$

$25 \leq 25$  luego la solución sigue siendo factible.

¿Qué le pasa al dual?

Se cambia la restricción 3:

$$5y_1 + 4y_2 \geq 4 \rightarrow 7y_1 + 4y_2 \geq 4$$

$$7^*(4/7) + 4^*(0) \geq 4$$

El cambio con el dual cumple la solución sigue siendo óptima.

### 6. Adición de una nueva restricción

El número de operaciones disponibles para procesar el producto 3, son como máximo 4.

Para la nueva restricción adicionar:

$$X_3 \leq 4 \rightarrow X_3 + X_6 = 4$$

Nueva variable de relleno

Efecto cambio:

La nueva solución óptima mejora la anterior como se puede observar en la tabla del simplex.

Primero se averigua si la nueva restricción cumple o no:

En la tabla final óptima obtenida, se tiene  $X_3^* = 5$

$X_3 \leq 4 \rightarrow 5 \leq 4$  solución deja de ser factible.

Se agrega la nueva restricción al planteamiento del problema original.

**Problema Primo**

Max  $U = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$   
 c.s.r.  
 $6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 25$   
 $3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_5 = 20$   
 $x_3 + x_6 = 4$   
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Con base en la tabla del simplex inicial se selecciona quién entra y sale de la base.

Iteración inicial

	$C_j$		3	1	4	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	b/a
0	$X_4$	25	6	3	5	1	0	0	25/5
0	$X_5$	20	3	4	4	0	1	0	20/4
0	$X_6$	4	0	0	1	0	0	1	4/1
	$U_x$	0	-3	-1	-4	0	0	0	
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$		

→ Elemento pivote

Iteración 1

	$C_j$		3	1	4	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	b/a
0	$X_1$	5	6	3	0	1	0	-5/4	5/6
0	$X_5$	0	3	4	0	0	1	-4	4/3
4	$X_3$	4	0	0	1	0	0	1	4/0
	$U_x$	16	-3	-1	0	0	0	4	
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$		

Iteración final

	$C_j$		3	1	4	0	0	0	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	b/a
3	$X_1$	5/6	1	1/2	0	1/2	0	30/4	
0	$X_5$	0	0	5/3	0	-1/2	1	-10/3	
4	$X_3$	4	0	0	1	0	0	1	
	$U_x$	111/6	0	1/2	0	3/2	0	116/4	
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$		

Nueva solución del problema

$$U_x^* = \frac{116}{6}; x_1^* = 5/6; x_2^* = 0; x_3^* = 4; x_4^* = 0; x_5^* = 0; x_6^* = 0$$

$$U_y^* = \frac{116}{6}; y_1^* = 3/2; y_2^* = 0; y_3^* = \frac{116}{4}; y_4^* = 0; y_5^* = \frac{1}{2}; y_6^* = 0$$

Se comprueba si cumple o no con la nueva solución óptima.

Reemplazamos en la restricción 1 y 3:

$$6X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 25 \quad 6(5/6) + 3(0) + 5(4) \leq 25 \rightarrow 25 \leq 25$$

$4y_1 + 2y_2 \geq 7; 4(3/2) + 2(0) \geq 7$ ; luego sigue siendo óptima.

¿Qué le pasa al dual?

$$5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 4 \rightarrow 5(3/2) + 4(0) + (116/6) \geq 4 \rightarrow 15/2 + 116/6 \geq 4; 164/6 \geq 4;$$

$4.4 \geq 4$ ; luego sigue óptimo.

### 7. Adición de una nueva variable

Después de hallar la solución óptima al problema, se encuentra que no se han considerado todas las actividades alternas. Considerar una nueva actividad requiere añadir esta nueva variable a la función objetivo y a las restricciones, con coeficientes apropiados; para el caso del problema que se viene considerando.

Supongamos que se tiene un nuevo producto  $X_4$ , del cual se tendría una ganancia de 5 pesos por unidad, requerirá 4 horas en la máquina A y 2 horas en la máquina B el nuevo modelo del problema Primo es.

**Problema Primo**

Max  $U = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 0x_5 + 0x_6$   
c.s.r.  
 $6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 25$   
 $3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_6 = 20$   
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Iteración inicial

	$C_j$		3	1	4	7	0	0	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	b/a
0	$X_5$	25	6	3	5	4	1	0	25/4
0	$X_6$	20	3	4	4	2	0	1	20/2
	$U_x$	0	-3	-1	-4	-7	0		
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$		

Iteración 1 y final

	$C_j$		3	1	4	7	0	0	
$C_B$	$X_B$	B	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	b/a
7	$X_4$	25/4	6/4	3/4	5/4	1	1/4	0	
0	$X_5$	30/4	0	10/4	6/4	0	-1	1	
	$U_x$	43.75	30/4	17/4	19/4	0	7/4	0	
			$Z_1-C_1$	$Z_2-C_2$	$Z_3-C_3$	$Z_4-C_4$	$Z_5-C_5$		

Nueva solución del Primo y el dual

$$U_x^* = 43.75; x_1^* = 0; x_2^* = 0; x_3^* = 0; x_4^* = \frac{25}{4}; x_5^* = \frac{30}{4}; x_6^* = 0$$

$$U_y^* = 43.75; y_1^* = \frac{7}{4}; y_2^* = 0; y_3^* = \frac{30}{4}; y_4^* = \frac{17}{4}; y_5^* = \frac{19}{4}; y_6^* = 0$$

Se comprueba si cumple o no con la nueva solución óptima

Reemplazamos en la restricción 1 y 3:

$$6X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 4X_4 \leq 25 \quad 6(0) + 3(0) + 5(0) + 4(25/4) \leq 25 \rightarrow 25 \leq 25$$

Luego sigue siendo óptima

¿Qué le pasa al dual?

El dual cambia su solución óptima, esta se comprueba reemplazando

$$4y_1 + 2y_2 \geq 7 \rightarrow 4(7/4) + 2(0) \geq 7 \rightarrow 28/4 \geq 7; 7 \geq 4; \text{ luego sigue óptimo.}$$

### Ejercicios

#### Problema 1

Una empresa debe elaborar dos productos en un determinado periodo (un trimestre). La empresa puede pagar por materiales y mano de obra con dinero obtenido de dos fuentes de financiación: recursos propios y mediante crédito. Por lo cual, la empresa tiene las siguientes decisiones respecto a su plan operativo:

1. ¿Cuántas unidades debe producir del producto 1?
2. ¿Cuántas unidades debe producir del producto 2?
3. ¿Cuánto dinero debe obtener a crédito para realizar la producción de los dos productos?

Además, la empresa desea maximizar la ganancia sujeta a las condiciones siguientes:

- I. Los productos actualmente tienen su “mercado de ventas”, la empresa puede vender tantas unidades como pueda producir. Así mismo, la cantidad producida no tiene efecto en los precios del mercado, ya que el volumen de producción de la compañía es pequeño en relación con el volumen del mercado total. Por lo tanto, a la empresa le gustaría producir tantas unidades como fuera posible dentro de las restricciones financieras y de capacidad de producción. Estas restricciones junto con los datos de costos y precios se dan en la tabla que posteriormente se describirá.
- II. Los fondos propios de la compañía disponible durante el periodo son de \$50.000.
- III. Un banco le hará un crédito de hasta \$ 18.000 por trimestre a una tasa de interés del 15 % por trimestre, si la razón financiera conocida como la prueba de ácido de la empresa permanece en una proporción 4 a 1, como mínimo mientras exista la deuda. Recuerde que la prueba de ácido está dada por la razón de efectivo más, cuentas por cobrar dividido en las cuentas por pagar.
- IV. Como se observará, los pagos de mano de obra y materia prima se hacen al final del periodo de producción; por lo tanto, el crédito necesario se obtiene en ese momento. Los envíos de los productos procesados se hacen a crédito, al final del periodo de producción. Finalmente, el ingreso por ventas se recibe y las cuentas por pagar se cancelan al final del siguiente periodo.

Tabla 7 de capacidad, precios y costos

Producto	Precio de venta (\$/U)	Costo de producción (\$/U)	Horas para producir una unidad en el departamento		
			A	B	C
1	18	13	.6	.4	.3
2	15	11	.4	.5	.2
Horas Disponibles Trimestre			550	500	300



Elabore mediante un análisis postóptimo una aplicación de los siete casos anteriormente descritos.

### Problema 2

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{C.S.R.} \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 5 \\ 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 &\geq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\geq 35 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Modelo determinístico del transporte

El Método Simplex es una técnica poderosa para la solución de un mundo de clases de problemas de programación lineal. Teniendo en cuenta este hecho, es razonable sospechar que, para algunos tipos especiales de problemas, existen métodos especiales de solución, los cuales son menos trabajosos que el Método Simplex. Uno de estos problemas especiales es el *Problema del Transporte*.

Ejemplo del problema:

Existen  $n$  centros de distribución que tienen que abastecerse de  $m$  fábricas de un cierto producto, la  $i$ -ésima fábrica ( $i = 1 \dots m$ ) produce  $a_{ij}$  unidades del producto por periodo. La  $j$ -ésima bodega ( $j = 1 \dots n$ ) requiere  $b_j$  unidades por periodo. El costo de mandar  $x_{ij}$  unidades de la fábrica  $i$  al centro de distribución  $j$  es  $C_{ij}$ .

¿Cuál sería la formulación de este problema para obtener una solución óptima por el Método Simplex?

El modelo de formulación es el siguiente.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{C.S.R.} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\geq O_i \text{ para } i=1 \dots m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq d_j \text{ para } j=1 \dots n \\ x_{ij} &\geq 0 \text{ para } i=1,2,3 \text{ y } j=1,2,3,4,5 \end{aligned}$$

La descripción de cada componente del modelo original es como se detalla a continuación

### Observación sobre el modelo

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n O_{ij} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \\ \downarrow & \quad \downarrow \\ \text{Disponibilidad} & \quad \text{Total} \\ \\ \sum_{j=1}^n d_j &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \\ \downarrow & \quad \downarrow \\ \text{Demanda} & \quad \text{Total, enviado} \end{aligned}$$

Es decir, que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m O_i &= \sum_{j=1}^n d_j \\ \downarrow & \quad \downarrow \\ \text{Oferta total} & \quad \text{Demanda} \end{aligned}$$

Si hay desigualdades en las restricciones, se puede “crear” un centro de distribución o una fábrica ficticia con el fin de equilibrar la sumatorias de las ofertas y demandas.

2. Todos los coeficientes en las restricciones son iguales a uno. Por lo cual, la solución dada por el Método Simplex es compleja de obtener, ya que tiene muchas variables y restricciones. Afortunadamente, existe un método de solución más sencillo para aplicar al problema del transporte, el cual se explicará a continuación. El método de solución trata el problema expresado en forma de matriz, en vez de un conjunto de ecuaciones. Nótese el problema general expresado en la matriz y las posiciones de las diferentes constantes y variables.

**Modelo de la matriz del transporte**

D O	Destinos							Oferta
	1	2	3	.....	n-2	n-1	n	
Fuentes (Orígenes)	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	.....			$C_{1n}$	$O_1$
	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	.....			$X_{1n}$	
	$C_{21}$	$C_{22}$	$C_{23}$	.....			$C_{2n}$	$O_2$
	$X_{21}$	$X_{22}$	$X_{23}$	.....			$X_{2n}$	
	.	.	.	.....	.	.	.	.
	$C_{m1}$	$C_{m2}$	$C_{m3}$	.....			$C_{mn}$	$O_m$
	$X_{m1}$	$X_{m2}$	$X_{m3}$	.....			$X_{mn}$	
Demanda	$d_1$	$d_2$	$d_3$	.....	$d_{n+2}$	$d_{n-1}$	$d_n$	$\sum d = \sum o$

**Procedimiento**

- Construir la matriz de transporte
- Establecer el equilibrio  $\sum_{i=1}^m O_i = \sum_{j=1}^n d_j$
- Si  $\sum_{i=1}^m O_i > 0$  se agrega una demanda o producto ficticio.
- Si  $\sum_{j=1}^n d_j > 0$  se agrega una oferta o capacidad de una fábrica ficticia.
- Los costos de la nueva fábrica o centro de producción son igual a cero.
- Las variables  $X_{ij}$  indican la cantidad de unidades a transportar del origen  $i$  al destino  $j$ .

**Ejemplo ilustrativo del problema del transporte**

Una compañía ha decidido manufacturar algunos o todos sus cinco productos nuevos en tres de sus fábricas que tienen capacidades de producción sobrante. Los productos se venden por peso a \$ 100 unidad, para simplificar el problema cada una unidad de producto será la cantidad de ese producto el esfuerzo productivo para hacer cada producto es igual.

Las capacidades disponibles de cada fábrica son:

Tabla 8 capacidad

Fábricas	Capacidad
1	40
2	60
3	90

En el presente ejemplo; no importan que sean unidades del producto 1, 2, 3, 4 o 5. Un estudio de mercados determinó que las ventas potenciales son así:

Tabla 9 información Productos

Productos	1	2	3	4	5
Ventas Potenciales	30	40	70	40	60

Los costos variables de producción de cada producto en cada fábrica son los siguientes:

Tabla 10 Costos Variables

Producto	1	2	3	4	5
Fábricas					
1	20	19	14	21	16
2	15	20	13	19	16
3	18	15	18	20	X

¿Qué cantidad de cada producto se deben fabricar para satisfacer las necesidades del mercado?

**Solución**

- Formulación según matriz de transporte

Para formular esta situación como un problema de transporte, las fábricas son los orígenes y los productos (o sus clientes) son los destinos. Las variables de decisión,  $x_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), ( $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ), es la cantidad de productos  $j$  en la fábrica  $i$ . Las disponibilidades de producción en cada fábrica son las ofertas.

El planteamiento de la matriz de transporte es cómo se detalla a continuación.

Matriz de transporte

Productos	Productos					Oferta
Fábricas	1	2	3	4	5	
1	$20$ $X_{11}$	$19$ $X_{12}$	$14$ $X_{13}$	$21$ $X_{14}$	$16$ $X_{15}$	40
2	$15$ $X_{21}$	$20$ $X_{22}$	$13$ $X_{23}$	$19$ $X_{24}$	$16$ $X_{25}$	60
3	$18$ $X_{31}$	$15$ $X_{32}$	$18$ $X_{33}$	$20$ $X_{34}$	$M$ $X_{35}$	90
Demanda	30	40	70	40	60	190 240

Como las demandas exceden las capacidades de las fábricas, las demandas son mayores a las ofertas, es necesario introducir una fábrica “ficticia” para establecer el equilibrio entre oferta y la demanda.

A esa nueva fábrica ficticia sus costos de producción se asumen iguales a cero y el costo para el producto 5 en la fábrica 3 es M (es decir, es un valor muy grande ante la incertidumbre para producirlo en la fábrica, ante la falta de capacidad). Obteniendo:

Matriz transporte cuadrada

Productos		Productos					Oferta
Fábricas		1	2	3	4	5	
Fábricas	1	20 $X_{11}$	19 $X_{12}$	14 $X_{13}$	21 $X_{14}$	16 $X_{15}$	40
	2	15 $X_{21}$	20 $X_{22}$	13 $X_{23}$	19 $X_{24}$	16 $X_{25}$	60
	3	18 $X_{31}$	15 $X_{32}$	18 $X_{33}$	20 $X_{34}$	M $X_{35}$	90
	4	0 $X_{41}$	0 $X_{42}$	0 $X_{43}$	0 $X_{44}$	0 $X_{45}$	50
Demanda		30	40	70	40	60	240 240

### Soluciones básicas factibles al problema del transporte

Se define de la misma manera que en el problema general de programación lineal, pero el método de solución factible se ejecuta directamente en la matriz, en vez de utilizar las ecuaciones originales del modelo simplex; identificando todas las posibles soluciones básicas factibles que se puedan obtener en la tabla.

Si hay “m” fuentes y “n” destinos iguales, el modelo original contenía (m + n) ecuaciones y a primera vista parece que habría (m + n) variables básicas, es decir que una solución básica factible, no-degenerada, tendría (m + n) variables positivas. Es decir, que existe:

$$\sum_{i=1}^m O_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n d_j$$

Cualquiera de las ecuaciones puede derivarse en términos de las otras. Por lo tanto, hay solamente (m+n-1) ecuaciones linealmente independientes, y una

solución básica factible no-degenerada necesita solamente (m+n-1) de (m+n-1) variables positivas, es necesario recordar que una solución básica factible degenerada tendría menos de m+n-1 variables positivas.

Por lo cual, se precisa otra condición para asegurar que la solución es básica. No hay que olvidar que una solución básica corresponde a un punto extremo del conjunto de soluciones factibles. Para obtener la solución básica en la matriz de transporte, es necesario que las  $x_{ij}$  ocupen posiciones independientes. Esto quiere decir que no sea posible hacer un ciclo, o una vuelta, con “saltos” en ángulos perpendiculares entre grupo de por lo menos 4  $x_{ij}$ .

Para ilustrar, considere una solución al siguiente ejemplo: se precisan (m+n-1), (4+5-1) = 8 variables básicas (no negativas). En seguida se da una solución factible, no-degenerada. No es básica porque puede hacerse una vuelta entre las variables  $x_{14}$ ,  $x_{15}$ ,  $x_{25}$ ,  $x_{24}$  (en las posiciones de las variables básicas, se hallan los valores de las variables).

Matriz de asignación

Productos.		Productos					Oferta
Fábricas.		1	2	3	4	5	
Fábricas	1				20	20	40
	2				20	20	60
	3		20	70			90
	4	30	20				50
Demandas		30	40	70	40	60	

Para tener una solución básica factible no-degenerada, se necesita:

1.  $x_{ij} > 0$
2. Exactamente (m+n-1) variables positivas.
3. Variables básicas en posición independientes.

Durante el desarrollo del ejemplo se dará cuenta que no es siempre fácil hallar una solución básica, factible, no-degenerada. Para obtenerla existen varios métodos alternativos, como son el método simplex, método de la esquina no-roeste, el Método de Vogel y el Método de la solución óptima.

### Formulación Método simplex para la solución del problema del transporte

Para ello, se realiza el procedimiento de la formulación del método simplex y se resuelve por la tabla del simplex.

1. Definimos las variables de decisión  $x_{ij}$  del problema.

Para el caso del ejemplo, tenemos:

$X_{ij}$  para  $i = 1, \dots, 3$  son las fábricas y  $j = 1, \dots, 5$  son los productos. La definición general es cantidad de unidades a producir del producto  $j$  en la fábrica  $i$ .

La argumentación de cada variable es la siguiente.

$X_{11}$  cantidad de unidades del producto 1 a elaborar en la fábrica 1 (u)

$X_{12}$  cantidad de unidades del producto 2 a elaborar en la fábrica 1 (u)

$X_{13}$  cantidad de unidades del producto 3 a elaborar en la fábrica 1 (u)

$X_{14}$  cantidad de unidades del producto 4 a elaborar en la fábrica 1 (u)

$X_{15}$  cantidad de unidades del producto 5 a elaborar en la fábrica 1 (u)

$X_{21}$  cantidad de unidades del producto 1 a elaborar en la fábrica 2 (u)

$X_{22}$  cantidad de unidades del producto 2 a elaborar en la fábrica 2 (u)

$X_{23}$  cantidad de unidades del producto 3 a elaborar en la fábrica 2 (u)

$X_{24}$  cantidad de unidades del producto 4 a elaborar en la fábrica 2 (u)

$X_{25}$  cantidad de unidades del producto 5 a elaborar en la fábrica 2 (u)

$X_{31}$  cantidad de unidades del producto 1 a elaborar en la fábrica 3 (u)

$X_{32}$  cantidad de unidades del producto 2 a elaborar en la fábrica 3 (u)

$X_{33}$  cantidad de unidades del producto 3 a elaborar en la fábrica 3 (u)

$X_{34}$  cantidad de unidades del producto 4 a elaborar en la fábrica 3 (u)

$X_{35}$  cantidad de unidades del producto 5 a elaborar en la fábrica 3 (u)

2. Definir de la función objetivo

$$\begin{aligned} \text{Min CV} = & 20\left(\frac{\$}{u}\right)x_{11}(u) + 19\left(\frac{\$}{u}\right)x_{12}(u) + 14\left(\frac{\$}{u}\right)x_{13}(u) + 21\left(\frac{\$}{u}\right)x_{14}(u) + 16\left(\frac{\$}{u}\right)x_{15}(u) + \\ & 15\left(\frac{\$}{u}\right)x_{21}(u) + 20\left(\frac{\$}{u}\right)x_{22}(u) + 13\left(\frac{\$}{u}\right)x_{23}(u) + 19\left(\frac{\$}{u}\right)x_{24}(u) + 16\left(\frac{\$}{u}\right)x_{25}(u) + \\ & 18\left(\frac{\$}{u}\right)x_{31}(u) + 15\left(\frac{\$}{u}\right)x_{32}(u) + 18\left(\frac{\$}{u}\right)x_{33}(u) + 20\left(\frac{\$}{u}\right)x_{34}(u) + M\left(\frac{\$}{u}\right)x_{35}(u) \end{aligned}$$

3. Definir las restricciones

Se tienen dos tipos de restricciones por oferta y por demanda.

Oferta

$$x_{11}(u) + x_{12}(u) + x_{13}(u) + x_{14}(u) + x_{15}(u) \leq 40(u)$$

$$x_{21}(u) + x_{22}(u) + x_{23}(u) + x_{24}(u) + x_{25}(u) \leq 60(u)$$

$$x_{31}(u) + x_{32}(u) + x_{33}(u) + x_{34}(u) + x_{35}(u) \leq 90(u)$$

Demanda

$$x_{11}(u) + x_{21}(u) + x_{31}(u) \geq 30(u)$$

$$x_{12}(u) + x_{22}(u) + x_{32}(u) \geq 40(u)$$

$$x_{13}(u) + x_{23}(u) + x_{33}(u) \geq 70(u)$$

$$x_{14}(u) + x_{24}(u) + x_{34}(u) \geq 40(u)$$

$$x_{15}(u) + x_{25}(u) + x_{35}(u) \geq 60(u)$$

4. Definir la condición de no negatividad

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para } i=1,2,3 \text{ y } j=1,2,3,4,5$$

5. Definir modelo matemático

6.

$$\begin{aligned} \text{Min CV} = & 20x_{11} + 19x_{12} + 14x_{13} + 21x_{14} + 16x_{15} + \\ & 15x_{21} + 20x_{22} + 13x_{23} + 19x_{24} + 16x_{25} + \\ & 18x_{31} + 15x_{32} + 18x_{33} + 20x_{34} + Mx_{35} \end{aligned}$$

C.S.R.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 40$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 60$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 90$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 30$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 40$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 70$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 40$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} \geq 60$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para } i=1,2,3 \text{ y } j=1,2,3,4,5$$

## Método de la esquina noroeste

Para el desarrollo del presente modelo se debe seguir el siguiente procedimiento:

1. Empezar en la esquina noroeste.
2. Asignar la cantidad máxima posible a esa casilla.

- Mover una casilla (posición) a la derecha si le queda alguna disponibilidad, asignar lo máximo posible si no le queda ninguna, mover una casilla (posición) hacia abajo y asignar la cantidad máximo posible. Si no puede hacer ninguna de ellas, se termina. Hasta agotar tanto la oferta como la demanda, ver matriz del transporte.

Matriz resultante

Productos. Fábricas		Productos					Oferta
		1	2	3	4	5	
Fábricas	1	30	10				40
	2		30	30			60
	3			40	40	10	90
	4					50	50
Demandas		30	40	70	40	60	

- Esta es una solución básica factible no-degenerada, pero  $x_{35}$  es una variable básica y ya que tiene un costo de M, es obvio que no es una solución óptima; a continuación, se detallan los valores de  $x_{ij}$  y el costo mínimo.

$$x_{11} = 30 \quad x_{33} = 40$$

$$x_{12} = 10 \quad x_{34} = 40$$

$$x_{22} = 30 \quad x_{35} = 10$$

$$x_{23} = 30 \quad x_{45} = 50$$

Costo mínimo =  $20 \cdot 30 + 19 \cdot 10 + 20 \cdot 30 + 13 \cdot 30 + 18 \cdot 40 + 20 \cdot 40 + M \cdot 10 + 0 \cdot 50 = 3300 + 10M$ .

Con este método hay un máximo de  $(m+n-1)$  variables básicas (asignaciones positivas a las posiciones en la tabla). Sin embargo, en ocasiones hay menos de  $(m+n-1)$  asignaciones, en tal caso hay una solución degenerada.

Lo único malo con el método de la esquina noroeste es que a veces la solución inicial queda muy lejos de la solución óptima. Por eso, es usualmente aconsejable comprobar con otros métodos para estar más cerca de la solución óptima.

## Método de Vogel

Para la aplicación del modelo se debe realizar el siguiente procedimiento:

- Construir una tabla de costos y requisitos y luego pasar al paso 3.
- Usar la tabla de costos y requisitos para el problema que le queda después de haber hecho las asignaciones previas.
- Calcular las diferencias entre el valor del elemento más pequeño y el segundo más pequeño para cada columna y fila.
- Escoger la columna o fila con la mayor diferencia (puede decidir en caso de empate arbitrariamente).
- Asignar lo máximo posible a la casilla con el costo menor en esa columna y fila.
- Asignar cero en las otras casillas en esa columna o fila donde la demanda o la disponibilidad está agotada.
- Hacer la única asignación posible en cualquier columna o fila que tenga solamente una casilla sin asignación.
- Tachar todas las columnas o filas asignadas, hasta que no queda ninguna columna ni fila. En caso contrario, ir al paso 2.

### Ejemplo

- Paso 1

P F		Productos					Oferta	Dif
		1	2	3	4	5		
Fábricas	1	20	19	14	21	16	40	2
	2	15	20	13	19	16	60	2
	3	18	15	18	20	M	90	3
	4	0	0	0	0	0	50	0
Demanda		30	40	70	40	60	240	
Dif.		15	15	13	19	16	240	



La columna 4 tiene la mayor diferencia (19) entonces asignamos lo máximo posible al menos costo  $c_{44} = 0$ ; el suministro es de 50, pero la demanda es de 40. Entonces asignamos 40 a  $x_{44}$ .

P F		Productos					Oferta		Dif
		1	2	3	4	5			
Fábricas	1	20	19	14	0	16	40	2	
	2	15	20	13	0	16	60	2	
	3	18	15	18	0	M	90	3	
	4	0	0	0	0	0	10	0	
Demanda		30	40	70	0	60	200		
Dif.		15	15	13	19	16	200		

Esto agota la demanda y los otros elementos en esa columna ( $x_{14}, x_{24}, x_{34}$ ) reciben asignaciones de cero. Seguido a esto, se tacha la columna 4 y se reduce la disponibilidad en la fila 4 por 40 (ya que 40 acaba de asignarse.)

• Paso 2

Obtenemos una nueva matriz y volvemos a realizar el paso anterior.

P F.		Productos					Oferta		Dif
		1	2	3		5			
Fábricas	1	20	19	14		16	40	2	
	2	15	20	13		16	60	2	
	3	18	15	18		M	90	3	
	4	0	0	0		0		0	
Demanda		30	40	70		50	190		
Dif.		15	15	13		16	190		

Una vez seleccionado el menor costo  $c_{45} = 0$  asignamos el máximo posible, en este caso 10. Por lo cual:  $10 \times x_{45}$ . Esto agota la oferta y los otros elementos en esa fila ( $x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{45}$ ) y se elimina la fila 4 por quedar agotada la oferta totalmente.

• Paso 3

Se obtiene una nueva matriz y volvemos a realizar el paso anterior.

P F.		Productos					Oferta		Dif
		1	2	3		5			
Fábricas	1	20	19	14		16	40	2	
	2	15	20	13		16	60	2	
	3	18	15	18		M	90	3	
Demanda		30	40	70		50	190		
Dif.		3	4	1		0'	190		

Una vez seleccionado el menor costo  $c_{32} = 15$  asignamos el máximo posible, en este caso 40. Así:  $40 \times x_{32}$ . Esto agota la demanda y los otros elementos en esa columna ( $x_{12}, x_{22}, x_{32}$ ) y se elimina la columna 2 por quedar agotada la demanda totalmente.

P F.		Productos				Oferta		Dif
		1	3		5			
Fábricas	1	20	0	14		16	40	2
	2	15	0	13		16	60	2
	3	18	0	18		M	50	3
Demanda		30	0	70		50	150	
Dif.		3	4	1		0'	150	

• Paso 4

Una nueva matriz se obtiene y volvemos a realizar el paso anterior

P F.		Productos				Oferta		Dif
		1	3		5			
Fábricas	1	20	0	14		16	40	2
	2	15	0	13		16	60	2
	3	18	0	18		M	50	3
Demanda		30	0	70		50	150	
Dif.		3		1		0'	150	

Seleccionamos el menor costo  $c_{21} = 15$  asignamos el máximo posible, 30 a  $x_{21}$ . Esto agota la demanda y los otros elementos en esa columna ( $x_{11}, x_{21}, x_{31}$ ) y se elimina la columna 1 por quedar agotada la demanda totalmente.

- Paso 5

La nueva matriz queda de la siguiente forma:

P. F.	Productos					Oferta	
Fábricas		1	2	3		5	Dif
	1	0	0	14		16	40
	2	0	0	13		16	30
	3	0	0	18		M	50
Demanda		0	70		50		120
Dif.			1		0'		120

Con menor costo  $c_{33} = 18$ ; y máximo posible 50 a  $x_{33}$ . Esto agota la demanda y los otros elementos en esa columna ( $x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{35}$ ) y se elimina la fila 3 por quedar agotada la oferta totalmente.

- Paso 6

La nueva matriz será:

P. F.	Productos					Oferta	
Fábricas		1	2	3		5	Dif
	1	0	0	14		16	40
	2	0	0	13		16	30
	3	0	0				0
Demanda		0	20		50		70
Dif.			1		0'		70

Con menor costo  $c_{23} = 13$  y máximo posible 20 a  $x_{23}$ . Esto agota la demanda y los otros elementos en esa columna ( $x_{13}, x_{33}$ ) y se elimina la columna 3 por quedar agotada la demanda totalmente.

- Paso 7

Obtenemos una nueva matriz y volvemos a realizar el paso anterior.

P. F.	Productos					Oferta	
Fábricas		1	2	3		5	Dif
	1	0	0	0		16	40
	2	0	0	0		16	10
	3	0	0				0
Demanda		0	0		50		50
Dif.			1		0'		50

Tenemos el menor costo  $c_{15} = 16$  y  $c_{25} = 16$ , asignamos los máximos posible en este caso 10 y 40, por no quedar sino una sola fila. Así, 40 a  $x_{15}$ , y 10 a  $x_{25}$ . Esto agota la demanda y los otros elementos en esas filas y se eliminan las filas 1 2 por quedar agotada la oferta y la demanda totalmente. De tal modo, determinamos la solución factible, mas no óptima.

P. F.	Productos					Oferta	
Fábricas		1	2	3		5	Dif
	1	0	0	0		0	0
	2	0	0	0		0	0
	3	0	0				0
Demanda		0	0		0		0
Dif.			0		0'		0

- Paso 8

Determinamos la solución básica factible, mas no óptima

P. F.	Productos					Oferta	
Fábricas		1	2	3	4	5	
	1					40	40
	2	30		20		10	60
	3		40	50			90
	4				40	10	50
Demanda	30	40	70	40	60		240
							240

Donde los valores de las variables y el costo mínimo son:

$$X_{15} = 40 \quad X_{32} = 40$$

$$X_{21} = 30 \quad X_{33} = 50$$

$$X_{23} = 20 \quad X_{44} = 40$$

$$X_{25} = 10 \quad X_{45} = 10$$

$$CMT = 40 \cdot 16 + 30 \cdot 15 + 20 \cdot 13 + 10 \cdot 16 + 40 \cdot 15 + 50 \cdot 18 + 40 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = \$ 3010$$

Solución que al no ser óptima es mejorada con respecto al método de la esquina noroeste.

### Método Solución Óptima

Una vez que se obtiene una solución básica factible no-degenerada al problema, ¿qué hacemos? Como en el Método Simplex, buscamos una solución mejor y lo hacemos por intercambio de las variables básicas y no-básicas.

Con este objetivo, se debe seleccionar una nueva variable básica, lo cual es equivalente a seleccionar un nuevo elemento para una asignación. Se elige el elemento (variable) que disminuye la función objetivo (que es minimizar costos), más rápidamente.

Para tal caso, se deben seguir estos pasos:

1. Asignar un + a una celda vacía, de tal forma que se pueda realizar una vuelta en forma rectangular.
2. Cambiar los otros elementos para mantener las ecuaciones (buscar la vuelta, y alternativamente restar y sumar + de estos elementos).
3. Averiguar si la nueva solución es mejor o peor que la anterior.
4. Del ejemplo probar el elemento (1,1), o sea,  $x_{11}$

P. F.	Producto	Oferta					
	1	2	3	4	5		
Fábrica	1	(+)				40 (-)	40
	2	30 (-)		20		10 (+)	60
	3		40	50			90
	4				40	10	50
Demanda	30	40	70	40	60		240 240

Efecto en la función objetivo: ya que los costos en esta vuelta son 20, 16, 16 y 15 respectivamente, el cambio en el costo total sería;  $+20-16+16-15 = +5$ , es decir un aumento en el costo total. Esto nos indica que  $x_{11}$  no debe entrar en la base.

A partir del ejemplo anterior, probar el elemento (3,1), es decir,  $x_{31}$

P. F.	Productos	Oferta					
	1	2	3	4	5		
Fábricas	1					40	40
	2	30-		20+		10	60
	3	+	40	50-			90
	4				40	10	50
Demanda	30	40	70	40	60		240 240

Al realizar la prueba con los costos de cada celda en esta vuelta 18, 15, 13 y 18; el cambio en el costo total sería;  $+18-15+13-18 = -2$ ; es decir una disminución en el costo total. Esto nos indica que  $x_{31}$  puede entrar a la base. Giramos la cantidad menos negativa en este caso 30 y se gira.

¿Qué variable sale de la base?

Para ello se suma y resta alternativamente entre los elementos que forman la figura rectangular, hasta que una variable (elemento) llegue a ser cero. Esta variable (elemento) sale de la base.

En el presente ejemplo  $x_{21}$  sale cuando  $x_{31}$  aumenta a 30. La nueva tabla aparece así:

P. F.	Productos	Oferta					
	1	2	3	4	5		
Fábricas	1					40	40
	2			50		10	60
	3	30	40	20			90
	4				40	10	50
Demanda	30	40	70	40	60		240 240

Este procedimiento es muy complejo y se puede demorar, pues es necesario identificar cuantas veces sea necesario las variables que entran y salen mediante la búsqueda de la vuelta cerrada; de tal modo que si se tratan de diversos problemas grandes se tendría que utilizar una cantidad de tiempo muy grande para obtener un resultado factible. Existe otro método más sistemático para determinar si una solución es óptima, y qué variable debe entrar en la base, que se detallará a continuación.



## Método alternativo para seleccionar qué variable entra y sale de la base

Recordar que la función objetivo es:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

C.S.R.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq O_i \text{ para } i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \geq d_j \text{ para } j=1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para } i=1, 2, 3 \text{ y } j=1, 2, 3, 4, 5$$

Si se tiene en la función objetivo algunas de las variables básicas, cualquier múltiplo de las restricciones puede sumarse o restarse de esta para eliminarla, estos múltiplos los denominaremos,  $u_i$  y  $v_j$  los reemplazamos en la función.

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m u_i \left( o_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} \right) + \sum_{j=1}^n v_j \left( d_j - \sum_{i=1}^m x_{ij} \right)$$

Equivalente a:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} + \sum_{i=1}^m u_i o_i + \sum_{j=1}^n v_j d_j$$

Al reemplazar la variable  $X_{ij}$  por  $x_{rs}$  y su coeficiente sea cero en la función objetivo (es decir si es una variable básica, o se contenga en la tabla de transporte), se hace necesario utilizar el siguiente artificio matemático.

$$C_{rs} - u_r - v_s = 0$$

Equivalente a:

$$C_{rs} = u_r + v_s$$

Esta ecuación se asigna a cada elemento (variable básica). Si hay  $(m+n-1)$  ecuaciones, se tiene  $(m+n)$  incógnitas, los múltiplos  $u_i$  y  $v_j$  implica que si fijamos uno de los  $u_i$  o  $v_j$ , podemos resolver para las  $(m+n-1)$  que quedan.

Una vez que se conoce las  $u_i$  y  $v_j$ , se puede identificar cuál de las variables no-básicas entra por cualquiera de sus coeficientes en la función objetivo, es decir, sus  $(c_{ij} - u_i - v_j)$ , la variable con el coeficiente más negativo entra a la base.

Para saber cuál variable sale de la base, se realiza el mismo procedimiento anterior. De la solución básica factible obtenida del Vogel, se parte para realizar el nuevo procedimiento.

P. F.	Productos					Oferta
	1	2	3	4	5	
Fábricas	1				40	40
	2	30		20	10	60
	3		40	50		90
	4				40	10
Demandas	30	40	70	40	60	240
						240

A partir de la matriz de soluciones se ponen los costos  $c_{ij}$  correspondientes a las celdas donde se registraron las variables básicas obtenidas. Se agrega una columna para el múltiplo  $U_j$  y una fila para  $V_i$  cómo se tiene en la matriz.

	1	2	3	4	5	$u_i$
1	(5)	(9)	(1)	(5)	16	$U_1 = 0$
2	15	(10)	13	(3)	16	$U_2 = 0$
3	(-2)	15	18	(-1)	(M')	$U_3 = 5$
4	(1)	(6)	(3)	0	0	$U_4 = -16$
$v_j$	$V_1=15$	$V_2=10$	$V_3=13$	$V_4=16$	$V_5=16$	

Ahora calculamos los  $u_i$  y  $v_j$ , para ello selecciona la fila con el mayor número de resultados obtenidos, en el caso del ejemplo la fila 2 y la hacemos  $u_2$  igual a cero. Con ese valor estimamos los otros valores de fila o columna de los otros múltiplos:

$$V_1 = c_{21} - u_2 = 15 - 0 = 15; V_3 = c_{23} - u_2 = 13 - 0 = 13; u_3 = c_{33} - v_3 = 18 - 13 = 5$$

$$V_5 = c_{25} - u_2 = 16 - 0 = 16; u_1 = c_{15} - v_5 = 16 - 16 = 0; u_4 = c_{45} - v_5 = 0 - 16 = -16$$

$$V_2 = c_{32} - u_3 = 15 - 5 = 10; V_4 = c_{44} - u_4 = 0 - (-16) = 16$$

Como se registra en la tabla anterior. Luego de calcular las  $(c_{ij} - u_i - v_j)$  para los elementos vacíos de la tabla. Estos valores corresponden a los coeficientes de las variables no-básicas que aparecen en la función objetivo.

$$C_{11} - u_1 - v_1 = 20 - 0 - 15 = 5; C_{35} - u_3 - v_5 = 18 - 5 - 16 = M'; C_{12} - u_1 - v_2 = 19 - 0 - 10 = 9$$

$$C_{41} - u_4 - v_1 = 0 - (-16) - 15 = 1; C_{13} - u_1 - v_3 = 14 - 0 - 13 = 1; C_{42} - u_4 - v_2 = 0 - (-16) - 10 = 6$$

$$C_{14} - u_1 - v_4 = 21 - 0 - (-16) = 37; C_{43} - u_4 - v_3 = 0 - (-16) - 13 = 3; C_{22} - u_2 - v_2 = 20 - 0 - 10 = 10$$

$$C_{24} - u_2 - v_4 = 19 - 0 - 16 = 3; C_{31} - u_3 - v_1 = 18 - 5 - 15 = -2; C_{34} - u_3 - v_4 = 20 - 5 - 16 = -1$$

¿Una vez estimados estos coeficientes de las variables no-básicas en la función objetivo, tenemos una solución óptima? No, porque se tienen valores negativos y estos deben ser todos positivos. Por lo tanto, se procede como en el método simplex, se selecciona la variable que entra a la base, que es  $x_{31}$ , por ser la más negativa.

La variable que sale de la base es la que llega primero a cero, cuando  $x_{31}$  se aumenta. (0 que pone el límite más crítico en  $x_{31}$ ). Mediante el procedimiento anterior se realiza el giro menos negativo entre las posiciones que forman el rectángulo.

P. F.	Productos					Oferta		
	1	2	3	4	5			
Fábricas	1					40	40	
	2	30-		20+			10	60
	3	+		40	50-			90
	4				40	10		50
Demandas		30	40	70	40	60	240	240

Entonces  $x_{21}$  llega a cero primero, mientras  $x_{31}$  aumenta. Luego  $x_{21}$  sale de la base. La nueva matriz de resultados es:

	1	2	3	4	5	0
1					40	40
2			50		10	60
3	30	40	20			90
4				40	10	50
D	30	40	70	40	60	

Se comprueba si esta nueva solución es óptima o no; aplicamos nuevamente el procedimiento anterior y se obtiene la nueva tabla de las  $(c_{ij} - u_i - v_j)$ :

	1	2	3	4	5	$u_i$
1					16	$U_1 = -5$
2			13		16	$U_2 = -5$
3	18	15	18			$U_3 = 0$
4				0	0	$U_4 = -21$
$v_j$	$V_1=18$	$V_2=15$	$V_3=18$	$V_4=21$	$V_5=21$	

Los cálculos se realizan de la misma manera que la iteración anterior de los  $u_i$  y  $v_j$ . Ahora, calculamos los  $(c_{ij} - u_i - v_j)$  de las casillas vacías, obteniéndose los siguientes resultados:

	1	2	3	4	5	$u_i$
1	7	9	1	5		$U_1 = -5$
2	2	10		3		$U_2 = -5$
3					-1	$U_3 = 0$
4	3	6	3			$U_4 = -21$
$v_j$	$V_1=18$	$V_2=15$	$V_3=18$	$V_4=21$	$V_5=21$	

Vemos que esta solución no es óptima, porque el coeficiente de  $x_{34} = -1$  lo que nos indica que debe entrar en la base  $x_{34}$ . La variable que sale se conoce analizando el giro de la figura rectangular.

P. F.	Productos					Oferta		
	1	2	3	4	5			
Fábricas	1				40	40		
	2			50+	10-	60		
	3	30	40	20-	+	90		
	4				40-	10+	50	
Demandas		30	40	70	40	60	240	240

Mientras que  $x_{34}$  crece,  $x_{25}$  llega a ser cero primero, lo que nos indica que  $x_{25}$  sale de la base.

Iteración 3

	1	2	3	4	5	0
1					40	40
2			60			60
3	30	40	10	10		90
4				30	20	50
D	30	40	70	40	60	

Para comprobar si es óptima esta solución, se hace nuevamente la tabla de las  $(c_{ij} - u_i - v_j)$ :

	1	2	3	4	5	$u_i$
1					16	$U_1 = -4$
2			13			$U_2 = -5$
3	18	15	18	20		$U_3 = 0$
4				0	0	$U_4 = -20$
$v_j$	$V_1=18$	$V_2=15$	$V_3=18$	$V_4=20$	$V_5=20$	

Se realizan los cálculos de la misma manera que la iteración anterior de los  $u_i$  y  $v_j$ . Luego, se calcula los  $(c_{ij} - u_i - v_j)$  de las casillas vacías, obteniéndose los siguientes resultados:

	1	2	3	4	5	$u_i$
1	6	8	0	5		$U_1 = -4$
2	2	10		4	1	$U_2 = -5$
3					M	$U_3 = 0$
4	2	5	2			$U_4 = -20$
$v_j$	$V_1=18$	$V_2=15$	$V_3=18$	$V_4=20$	$V_5=20$	

Esta tabla indica que la presente solución es una solución óptima; porque todas las variables no básicas son positivas.

Así, la solución óptima es.

$$X_{15}^* = 40, X_{23}^* = 60, X_{31}^* = 30, X_{32}^* = 40, X_{33}^* = 10, X_{34}^* = 10, X_{44}^* = 30, X_{45}^* = 20, z^* = \$2940.$$

Esta solución es mejor que las anteriores obtenidas mediante los anteriores métodos.

El cero en la celda (1,3) indica que hay dos soluciones óptimas que  $x_{13}$  puede entrar sin cambiar el valor z. Esta otra solución sería:

	1	2	3	4	5	0
1			10		30	40
2			60			60
3	30	40		20		90
4				20	30	50
D	30	40	70	40	60	

## Problemas de degeneración

La degeneración ocurre cuando hay menos de  $(m+n-1)$  variables básicas mayores de cero. El problema relacionado con la degeneración es que se desconoce cuál de los valores son iguales a cero y son en realidad básicos. Se corrige este problema con la asignación de una cantidad infinitamente pequeña al elemento básico que es cero.

### Ejemplo

En el ejemplo anterior se cambia la disponibilidad de la fábrica 3 de 90 a 70, y la demanda del producto 3 de 70 a 50. Usando el Método de Vogel para las asignaciones iniciales, se encuentran las mismas asignaciones excepto en el elemento  $x_{33}$ ; esta asignación se cambia de 50 a 30. La solución inicial aparece así:

	1	2	3	4	5	0
1					40	40
2	30		20		10	60
3		40	30			70
4				40	10	50
D	30	40	50	40	60	

Las  $(c_{ij} - u_i - v_j)$  tienen que ser iguales a las anteriores, ya que depende solamente de las posiciones de las variables básicas. Estas indican que  $x_{31}$  debe entrar como antes. Pero como una variable básica: ya que  $x_{21}$  y  $x_{33}$  llegan a cero simultáneamente.

En este caso, por tener valores iguales se escogería una arbitrariamente, sin embargo a la otra se le asigna un error ( $\epsilon$ ) y se consideraría como una variable básica. Se pretende que esta es una asignación real, y se lleva en las tablas siguientes.

Si suponemos que se escoge  $x_{21}$  para salir; la tabla aparece así:

	1	2	3	4	5	0
1					40	40
2			50		10	60
3	30	40	E			70
4				40	10	50
D	30	40	50	40	60	

Las variables básicas son idénticas al ejemplo anterior, por lo que las  $(c_{ij} - u_i - v_j)$  son las mismas, también estas indican que  $x_{34}$  entra y el rectángulo aparece así:

	1	2	3	4	5	0
1					40	40
2			50+		10-	60
3	30	40	e-	+		70
4				40-	10+	50
D	30	40	50	40	60	

La variable básica degenerada es una de las candidatas para salir, y ya que esto “llega” a cero primero “sale”, y la próxima tabla aparece así:

	1	2	3	4	5	0
1					40	40
2			50		10	60
3	30	40		e		70
4				40	10	50
D	30	40	50	40	60	

De nuevo, tenemos la misma solución básica “factible” que antes, de tal manera que las  $(c_{ij} - u_i - v_j)$  indican que esta es la solución óptima. Luego las asignaciones reales son:

	1	2	3	4	5	0
1					40	40
2			50		10	60
3	30	40				70
4				40	10	50
D	30	40	50	40	60	



# EJERCICIOS

## Problema 2

Considere el siguiente problema de transporte a partir de la tabla de costos y requerimientos.

Tabla de costos y requerimientos

O \ D	1	2	3	4	5	6	Oferta
1	3	1	4	5	3	6	50
2	4	3	4	5	6	7	40
3	2	4	4	2	4	1	60
4	4	2	2	1	2	2	25
Demanda.	30	50	20	40	30	10	

Hallar: solución

1. Método de la esquina noroeste
2. Método de Vogel
3. Formulación del simplex

## Problema 1

Considere el siguiente problema de transporte a partir de la tabla de costos y requerimientos.

Tabla de costos y requisitos

O \ D	1	2	3	4	5	6	Oferta
1	8	9	7	7	8	5	50
2	7	8	8	6	7	6	40
3	7	5	6	8	6	9	60
4	6	8	8	9	8	8	31
Demanda	30	50	20	40	30	11	

Determinar:

1. Formulación del simplex
2. Método de la esquina noroeste
3. Método de Vogel
4. Solución óptima

## Problema 3

La empresa Silver, fabricante de muebles, ha decidido producir tres tipos de muebles para oficina. Actualmente cuatro de sus plantas tienen capacidad de producción en exceso.

La información detallada en la presente tabla contiene los costos de producción (en miles de pesos) de cada producto en cada planta y la capacidad diaria de producción en cada una de ellas.

Tabla de Costos

	Productos			Capacidad de producción
	1	2	3	
Planta 1	10	6	8	200
Planta 2	8	7	7	300
Planta 3	9	5	8	200
Planta 4	11	6	x	250

El pronóstico de venta demuestra que es posible vender 500, 300 y 400 unidades de los productos 1, 2, 3, respectivamente. Las plantas pueden fabricar un

producto completamente o una combinación de productos según sus posibilidades. La planta 4 requiere para producir el producto 3 un costo  $x$  que indica la incertidumbre de su valor.

El señor Pedro, director de la empresa, quiere saber cómo asignar los nuevos productos a las plantas para minimizar el costo total de fabricación.

1. Elaborar un planteamiento como problema de transporte.
2. Resolverlo y formularlo por el Método Simplex.
3. Resolverlo por el Método de la esquina noroeste.
4. Resolverlo por el Método de Vogel
5. Resolverlo por el Método de solución óptima
6. Realizar una interpretación de los resultados de acuerdo con lo planteado en el problema.



# GLOSARIO

**C** **Coefficiente de contribución:** Son los valores que contiene la variable en la función objetivo, puede ser un precio, costo o una cantidad determinada.

**Coefficiente técnico:** son los valores que contienen las variables en las restricciones y son llamados valores estándares, es decir, se obtienen a partir de estudios de tiempo y movimiento.

**E** **Empate de variables básicas al salir de la base:** situación cuando varias variables básicas se vuelven cero simultáneamente a medida que se incrementa la variable a entrar.

**F** **Función objetivo:** es la expresión matemática (ecuación) que se va a optimizar.

**I** **Iteración:** es el desplazamiento desde una posición inicial a otro punto dentro del polígono de solución, hasta encontrar una solución óptima.

**M** **Método del transporte:** Es un método que recibe dicho nombre porque relaciona el envío de un lugar “i” a un lugar “j” de cierta cantidad de productos.

**Método Gran M:** Se llama así cuando el modelo matemático resultante de su formulación contiene restricciones mayores igual ( $\geq$ ) o (=) igual.

**Método postóptimo:** Es un análisis de sensibilidad a varios factores del problema con el fin de identificar aquellos que se deben calcular con más cuidado.

**Modelos de optimización:** Son modelos que buscan mediante un algoritmo matemático, una solución básica factible, también llamada solución óptima.

**P** **Polígono de soluciones:** son los puntos que conforman el área de soluciones factible.

**R** **Restricciones:** son las limitaciones de los recursos y pueden ser mayor igual o menor igual, según disponibilidad.

**S** **Solución degenerada:** vértice del polígono de soluciones donde se repite el proceso iterativo y no cambia la solución.

**Solución óptima:** es el resultado final encontrado mediante el proceso iterativo.

**T** **Tabla del simplex:** es un procedimiento compuesto por todas las variables del problema y los coeficientes que contienen tanto la función objetivo como sus restricciones.

**V** **Variable básica:** Reciben este nombre las variables que están en la tabla del simplex o matriz de transporte.

**Variable de decisión:** son incógnitas que son determinadas mediante la solución del problema a resolver.

- Ackoff, Sasiani. (1979). Fundamentos de investigación de operaciones. México: Limusa, México.
- Anderson, D. Sweeney, D., & Williams, T. (2004). Métodos cuantitativos para los negocios. México: Editorial Thomson.
- Gutiérrez Carmona, J. (2008). Modelos Financieros con Excel. Bogotá: ECOE.
- Hiller, F., Hiller, M., & Liberman, G. (2002). Métodos Cuantitativos para Administración. México: Editorial Prince Hill,
- Kamlesh, M., & Solow, D. (1996). Investigación Operaciones. México: MacGraw Hill.
- Moskowitz, H, & Wright (1982). Investigación Operacional. México: Prince Hall.
- Pérez Peña, Rodrigo. (2012) Documento de publicación diaria de la web [Blog online]. Recuperado el 22 de octubre del 2012 <http://rodrigopepe.webnode.es>.
- Prawda, J. (1979). Métodos y modelos de investigación de operaciones. Volumen I: modelos determinísticos. México: Limusa



